SMA AVICENNA CINERE

SEKOLAH AVICENNA

Olimpiade Sains Nasional

BERSAMA IRDED'S

Sang Pengelana

Mudahnya Belajar Matematika

www.irvanhabibali.wordpress.com

IRVAN MATEMATIKA ASYIK

Ketaksamaan QM-AM-GM-HM mungkin terdengar asing bagi kebanyakan orang karena teorema ini muncul dan dipakai hanya pada saat mengerjakan soal-soal setingkat olimpiade (untuk kalangan sekolah menengah), tetapi akan dipelajari secara mendalam oleh mahasiswa yang bereksplorasi dalam dunia matematika atau yang serumpun. Berikut disajikan definisi **QM-AM-GM-HM**

Definisi: Rataan Kuadrat (Quadratic Mean – QM)

Jika diberikan bilangan real nonnegatif $x_1, x_2, \cdots, x_n$, maka nilai dari rataan kuadrat bilangan-bilangan itu dinyatakan oleh $\text{QM} = \sqrt{\dfrac{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}{n}}$.

Definisi: Rataan Aritmetik (Arithmetic Mean – AM)

Jika diberikan bilangan real nonnegatif $x_1, x_2, \cdots, x_n$, maka nilai dari rataan aritmetik bilangan-bilangan itu dinyatakan oleh $\text{AM} = \dfrac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$.

Catatan: Rataan aritmetik (kadang disebut sebagai rataan hitung) adalah nilai rata-rata yang telah kita kenal sejak sekolah dasar.

Definisi: Rataan Geometrik (Geometric Mean – GM)

Jika diberikan bilangan real nonnegatif $x_1, x_2, \cdots, x_n$, maka nilai dari rataan geometrik bilangan-bilangan itu dinyatakan oleh $\mathbf{GM} = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdots x_n}$.

Catatan: Rataan geometrik sering kali disebut sebagai rataan ukur.

Definisi: Rataan Harmonik (Harmonic Mean – HM)

Jika diberikan bilangan real nonnegatif $x_1, x_2, \cdots, x_n$, maka nilai dari rataan harmonik bilangan-bilangan itu dinyatakan oleh $\mathbf{HM} = \dfrac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}}$.

Ketaksamaan berikut selalu berlaku dan banyak digunakan untuk menyelesaikan persoalan maksimum-minimum.

$$\mathbf{QM} \geq \mathbf{AM} \geq \mathbf{GM} \geq \mathbf{HM}.$$

Tips: untuk mempermudah mengingatnya, coba hafalkan mnemonik: **Qu Adalah Guitar Hero.**
Jika bilangan real nonnegatif yang kita punya adalah $x_1, x_2, \cdots, x_n$, kesamaan QM-AM-GM-HM akan tercapai saat $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

Untuk bilangan real positif x dan y dengan $xy = \frac{1}{3}$, tentukan nilai minimum dari $\frac{1}{9x^6} + \frac{1}{4y^6}$

$(A)\ 5$

$(B)\ 6$

$(C)\ 7$

$(D)\ 8$

$(E)\ 9$

Untuk $x \geq 0$, nilai terkecil dari $\dfrac{4x^2 + 8x + 13}{6 + 6x}$ adalah $\cdots$

A. 0

B. 1

C. 2

D. 4

E. 5

Nilai minimum dari $x + \frac{1}{x^2}$ untuk $x > 0$ adalah $\cdots$

A. $3\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$

B. $3\sqrt[3]{\frac{1}{4}}$

C. $3\sqrt{\frac{1}{2}}$

D. $3\sqrt{\frac{1}{8}}$

E. $\sqrt[3]{\frac{1}{4}}$

Jika jumlah dua bilangan bulat positif adalah 24, maka nilai terkecil dari jumlah kebalikan bilangan-bilangan tersebut adalah $\cdots$.

A. 1

B. $\frac{1}{2}$

C. $\frac{1}{3}$

D. $\frac{1}{4}$

E. $\frac{1}{6}$

Bilangan rasional positif $a < b < c$ membentuk barisan aritmetika dan memenuhi $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} = 3.$

Banyak bilangan positif a yang memenuhi adalah $\cdots$

A. 0

B. 1

C. 2

D. 3

E. 4

Jika $a \geq b > 1$, maka nilai terbesar yang mungkin untuk ${}^a\log\left(\frac{a}{b}\right) + {}^b\log\left(\frac{b}{a}\right)$ adalah $\cdots$

A. 0

B. 1

C. 2

D. 4

E. 8

Nilai minimum dari $f(x)=\dfrac{9x^2\sin^2 x+4}{x\sin x}$ untuk $0<x<\pi$ adalah $\cdots$.

A. 8

B. 10

C. 12

D. 13

E. 14

Diberikan $f(x) = x^2 + 4$. Misalkan x dan y adalah bilangan real positif yang memenuhi $f(xy) + f(y - x) = f(y + x)$. Nilai minimum dari $x + y$ adalah $\cdots$

A. 0

B. 1

C. $\sqrt{2}$

D. 2

E. $2\sqrt{2}$

Banyaknya bilangan real x yang memenuhi persamaan $x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 176x + 2009 = 0$ adalah $\cdots$.

A. 0

B. 1

C. 2

D. 3

E. 2009

Nilai minimum dari

$$\frac{(a^3+b^3+1)(b^3+c^3+1)(c^3+a^3+1)}{a^2b^2c^2}$$

untuk bilangan real positif a, b, c adalah $\cdots$.

A. 18
B. 27
C. 30
D. 33
E. 36

Banyak pasangan bilangan real (a, b) yang memenuhi persamaan $a^4 + b^4 = 4ab - 2$ adalah $\cdots$

A. 0

B. 1

C. 2

D. 4

E. 8

Jika a dan b bilangan real positif, maka nilai minimum dari $4\left(\frac{a^2}{b^2}+\frac{b}{a}\right)^3$ adalah $\cdots$

A. 3

B. 6

C. 9

D. 15

E. 27

Jika a dan b adalah bilangan real positif yang memenuhi $\left(a+\frac{4}{a}\right)\left(b+\frac{5}{b}\right)=\sqrt{320}$, maka nilai ab sama dengan $\cdots$.

A. $\sqrt{5}$

B. $2\sqrt{5}$

C. $4\sqrt{5}$

D. 5

E. 10

Misalkan $a, b,$ dan c adalah tiga bilangan real yang memenuhi

$$(4^{2a}+1)(4^{2b}+2)(4^{2c}+8)=2^{2a+2b+2c+5}.$$

Nilai dari $\dfrac{a+b}{c}$ adalah $\cdots$.

A. $\dfrac{1}{3}$

B. $\dfrac{1}{2}$

C. $\dfrac{2}{3}$

D. $\dfrac{3}{4}$

E. $\dfrac{5}{4}$

Buktikan bahwa untuk setiap $x, y > 0$, berlaku $\dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x} \geq 2.$

Untuk bilangan positif a, b, c, d, buktikan bahwa selalu berlaku

$$(a+b+c+d)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right) \geq 16.$$

Untuk $p, q, r > 0$ dan $p + q + r = 1$, buktikan bahwa $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} \geq 9$.

Untuk $a, b, c \geq 0$, buktikan bahwa $(a+b)(a+c)(b+c) \geq 8abc$.

Buktikan bahwa untuk x, y, z bilangan real positif, berlaku $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + xz + yz$. Kapan tanda kesamaan terjadi?

Buktikan bahwa $999! < 500^{999}$.
dimana $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$

Untuk $a, b > 0$, buktikan bahwa $\left(\dfrac{a+nb}{n+1}\right)^{n+1} \geq ab^n$ dengan n bilangan bulat positif.

Misalkan a dan b adalah bilangan positif yang memenuhi $a + b = ab$. Buktikan bahwa

$$\frac{a}{b^2 + 2017} + \frac{b}{a^2 + 2017} \geq \frac{4}{2021}.$$

Jika a dan b adalah bilangan real positif yang memenuhi $ab = 6$, tentukan nilai minimum dari $2a^2 + 4b$. Berapa nilai a dan b saat kondisi tersebut terjadi?

Jika a, b adalah bilangan real positif dan $a + 4b = 12$, tentukan nilai maksimum dari ab dan ab^2.