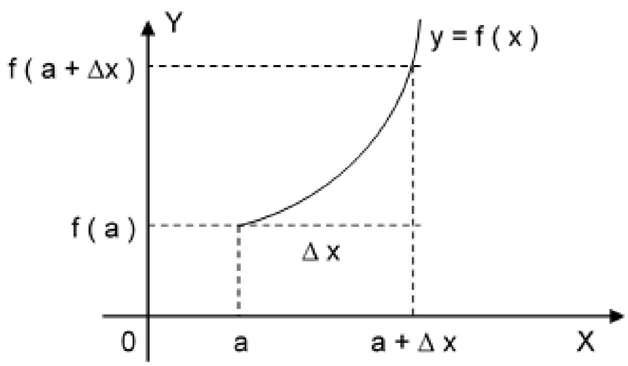
# TURUNAN FUNGSI ALJABAR

**IRVAN DEDY, S.Pd.,M.Pd**

Kalau kalian pergi ke sebuah pantai, perhatikanlah gelombang laut yang naik turun. Tinginya gelombang tersebut sangat bervariasi dan dimanfaatkan oleh para atlit untuk berselancar, para nelayan tradisional untuk menggerakkan perahu, dan juga ikan-ikan yang berlompatan. Menentukan tinggi rendahnya puncak gelombang dapat kita lakukan dengan menggunakan turunan fungsi aljabar.

## A. Pengertian Turunan Fungsi

- Jika suatu fungsi y = f (x) terdefinisi dalam interval $a \le x \le a + \Delta x$. Nilai fungsi untuk x = a adalah f (a) sedangkan untuk x = $a + \Delta x$ adalah f ( $a + \Delta x$ ).
- Laju perubahan rata–rata nilai fungsi f (x) terhadap x dalam interval $a \le x \le a + \Delta x$ adalah: $\dfrac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x}$




- Laju perubahan nilai fungsi f (x) terhadap x pada x = a dapat ditentukan dengan mengambil $\Delta x$ mendekati nol, ditulis $f(a) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x}$, dengan catatan limitnya ada.
- Pada umumnya nilai $\Delta x$ diganti dengan h sehingga turunan dari fungsi f(x) dapat ditentukan dengan $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$
- Perlu diperhatikan bahwa jika y = f(x) fungsi yang dapat diturunkan maka turunannya dapat dinyatakan dengan notasi-notasi berikut : y’,f’(x) yaitu notasi Lagrange atau aksen Dy, Df(x) dengan $\dfrac{d}{dx}$ adalah operator D yaitu notasi operator $\dfrac{dy}{dx}$, $\dfrac{d}{dx}$f(x) , yaitu notasi Leibniz

## B. Rumus Turunan Fungsi Aljabar

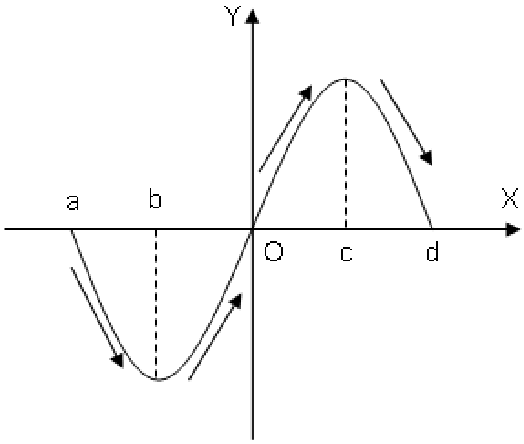
- Jika $y = f(x) = k$ dengan k konstanta maka $y' = \frac{dy}{dx} = f'(x) = 0$ untuk x sembarang
- Jika $f(x) = x$ disebut fungsi identitas maka $y' = \frac{dy}{dx} = f'(x) = 1$
- Jika $f(x) = kx$ maka turunannya $y' = \frac{dy}{dx} = f'(x) = k$
- Jika $f(x) = ax^n$, dengan n bilangan bulat positif dan a konstanta real, maka $f(x) = a.n.x^{n-1}$
- Jika $f(x) = k.U(x)$ maka $f'(x) = k.U'(x)$
- Jika $f(x) = U(x) \pm V(x)$ maka $f'(x) = U'(x).V(x) \pm U(x).V'(x)$
- Jika $y = f(x) = \frac{U(x)}{V(x)}$ maka $y' = \frac{dy}{dx} = f'(x) = \frac{U'(x).V(x) - U(x).V'(x)}{[V(x)]^2}$
- Jika $y = [U_{(x)}]^n \Rightarrow y' = n.[U_{(x)}]^{n-1}.U'_{(x)}$
- Jika $y = f[g(x)]$ maka $y' = \frac{dy}{dx} = f'[g(x)].g'(x)$

## C. Persamaan Garis Singgung

- Gradien dari sebuah persamaan garis singgung pada kurva $y = f(x)$ dapat dicari dengan menggunakan rumus $m = f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$
- atau lebih mudahnya gradien persamaan garis singgung pada kurva $y = f(x)$ adalah $m = y' = f'(x)$
- Jika P ($x_1$ $y_1$) terletak pada kurva $y = f(x)$ maka $tg\alpha = \left(\frac{dy}{dx}\right) x = x_1$
- Persamaan garis singgung/tangen di titik P ($x_1$ $y_1$) pada kurva f (x) adalah : $y - y_1 = \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=x_1} (x - x_1)$
- Garis normal adalah garis yang tegak lurus dengan garis singgung (tangen) pada P ($x_1$ , $y_1$).
- Persamaan normal di titik P ($x_1$ , $y_1$)pada kurva y = f (x) adalah : $y - y_1 = \frac{-1}{\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=x_1}} (x - x_1)$

## D. Fungsi Naik, Fungsi Turun, dan Titik Belok

- Perhatikan gambar di bawah ini




- Fungsi f disebut naik dalam daerah Df = { x| b ≤ x ≤ O} dan { x| O ≤ x ≤ c} sebab semakin besar nilai x menyebabkan nilai fungsi f semakin bertambah besar. Untuk fungsi naik maka $f'(x) > 0$
- Fungsi f disebut turun dalam daerah Df = { x| a ≤ x ≤ b} dan { x| c ≤ x ≤ d} sebab semakin besar nilai x menyebabkan nilai fungsi f semakin kecil. Untuk fungsi turun maka $f'(x) > 0$
- Fungsi f dikatakan mempunyai titik belok dititik O sebab pada saat f(0) fungsi berhenti kemudian lanjut naik kembali

## E. Nilai Maksimum dan Minimum

- Untuk dapat menentukan nilai maksimum dan minimum kita harus menentukan nilai stationer terlebih dahulu.
- Syarat menentukan nilai stasioner dari fungsi $y = f(x)$ adalah $y' = f'(x) = 0$
- Langkah – langkah
  a. menentukan nilai stasioner (jika ada)
  b. menentukan f (a) dan f (b)
  c. dari poin a dan b, nilai yang terbesar = maksimum dan nilai yang terkecil = minimum
  d. Dari suatu lintasan *s* = *f*(*t*), maka berlaku:
- Kecepatan : $v = \frac{ds}{dt}$
- Percepatan : $v = \frac{d^2 s}{dt^2} = \frac{dv}{dt}$

**Diskusikan Penyelesaian Soal-Soal Berikut !!!**

1. Dengan menggunakan definisi turunan, tentukanlah turunan dari fungsi $f(x)=9$
2. Dengan menggunakan definisi turunan, tentukanlah turunan dari fungsi $f(x)=2x-6$!
3. Dengan menggunakan definisi turunan, tentukanlah turunan dari fungsi $f(x)=x^2-2x+3$!
4. Tentukan turunan dari fungsi $f(x)=-5\sqrt[3]{x^2}$
5. Tentukan turunan dari fungsi $f(x)=\frac{2}{3}x^{-3}$
6. Tentukan turunan dari fungsi $f(x)=\frac{4}{x^4}$
7. Tentukan turunan dari $f(x)=4x^3-6x^2+7x-3$
8. Tentukan turunan dari $f(x)=(2x-4)^2$
9. Tentukan turunan dari fungsi $f(x)=(x+3)(2x-4)$
10. Tentukan turunan dari fungsi $f(x)=(2x-4)(x^2+3x-2)$
11. Tentukan turunan dari fungsi $f(x)=\frac{2x}{3x-1}$
12. Tentukan turunan dari fungsi $f(x)=\frac{2x-3}{4x+5}$
13. Tentukan turunan dari fungsi $f(x)=(2x+3)^4$
14. Tentukan turunan dari fungsi $f(x)=(x^2+5x-4)^3$
15. Tentukan turunan dari fungsi $f(x)=(2x^2-3x+1)^2(x+2)^3$
16. Tentukanlah gradien persamaan garis singgung kurva $y=2x^3+2x^2-x+2$ di titik yang berabsis – 1
17. Tentukan persamaan tangen dan normal pada kurva $y=x^3-2x^2+4$ di titik P (2,4)
18. Sebuah kayu lurus digunakan untuk menngambil sebuah benda yang mempunyai persamaan seperti kurva $y=x^2-4x-12$ pada titik (1,2). Tentukanlah kemiringan kayu tersebut agar dapat menyentuh benda tersebut!
19. Tentukanlah interval grafik dari fungsi $f(x)=x^2-4x$ naik dan turun!
20. Tentukan interval naik dan turun dari fungsi $f(x)=\frac{2}{3}x^3-x^2-12x+20$
21. Tentukanlah nilai-nilai stasioner dari fungsi $f(x)=x^3-6x^2+12x-3$. Tentukan pula jenis dari nilai-nilai stasioner tersebut!
22. Suatu tali yang salah satu ujungnya diikat digerakkan, sehingga membentuk gelombang naik turun. Jika persamaan gelombang tali tersebut adalah $f(x)=x^3+9x^2+24x+18$, tentukanlah interval naik dan turunnya gelombang yang dibentuk oleh tali tersebut!
23. Pada fungsi $f(x)=x^3-3x^2-24x+10$, tentukanlah titik stasioner, jenisnya, nilai maksimum dan minimumnya !
24. Tentukan nilai maksimum dan minimum dari $f(x)=4-(x+5)^2$ pada $-6 \le x \le 4$

25. Tentukan nilai maksimum dan minimum bagi fungsi $f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2+2x+1$

26. Seorang peneliti sedang mengamati gelombang di sebuah laut pantai selatan. Dalam sebuah pengamatan, terjadi sebuah gelombang laut dengan persamaan $f(x)=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2-6x+2$

    Peneliti tersebut mengukur ketinggian maksimum dari gelombang tersebut. Tentukanlah tinggi gelombang tersebut!

**Latihan Soal (kerjakan di buku latihan dengan menggunakan cara)**

1. Dengan menggunakan definisi turunan, tentukan turunan dari fungsi berikut
   a. $f(x)=4x-5$
   b. $f(x)=x^2-4$
   c. $f(x)=2x^2-4x+6$
   d. $f(x)=(x+2)(x-3)$
   e. $f(x)=\frac{1}{x^3}$
2. Tentukanlah turunan dari fungsi berikut!
   a. $f(x)=x^{-5}$
   b. $f(x)=\sqrt[3]{x^5}$
   c. $f(x)=\frac{4}{\sqrt[4]{x^3}}$
3. Tentukanlah turunan dari fungsi berikut!
   a. $f(x)=4x^3-12x^2+8x-2$
   b. $f(x)=(x+8)^2$
   c. $f(x)=(4-2x)^2$
4. Tentukan turunan dari fungsi berikut
   a. $f(x)=(x+4)(3x-2)$
   b. $f(x)=(x^2+2x-1)(x-3)$
   c. $f(x)=\frac{6}{5x+2}$
   d. $f(x)=\frac{3x-5}{4x+1}$
   e. $f(x)=\frac{(x+1)(3x-2)}{2x-1}$
5. Tentukan turunan dari fungsi berikut
   a. $f(x)=(x+4)^2$
   b. $f(x)=(5-3x)^4$

c. $f(x)=(2x^2+6x-5)^3$

d. $f(x)=(2x-4)^{\frac{3}{2}}$

e. $f(x)=\sqrt[4]{(5x-1)^3}$

6. Tentukan gradien dari persamaan garis singgung berikut
   a. Garis menyinggung kurva $y=x^2+x-5$ di titik yang berabsis 2
   a. Garis menyinggung kurva $y=x^2-3x-3$ di titik yang berordinat 1
   a. Garis menyinggung kurva $y=2x^3-x+4$ di titik (0, -1)
7. Persamaan garis tangen dan normal pada kurva
   a. $y = x^3 - 2x^3 + 5x - 2$ di A (2,6)
   b. $y = x^3 - 2x^2 + 5$ di P (2, 4)
8. Sebuah lidi lurus akan ditusukkan sebuah sebuah benda yang mempunyai persamaan menyerupai kurva $y=-x^2+4x-5$ di titik (1, 2). Tentukanlah kemiringan lidi tersebut agar dapat menyentuh atau menyinggung benda tersebut!
9. Tentukan interval agar fungsi berikut ini naik dan turun
   a. $y = x^2 + 5x - 4$
   b. $y = 6 + 4x - x^2$
   c. $y = 2x^3 + x^2 - 4x + 1$
   d. $y = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 - 5x + 6$
10. Carilah nilai stasioner fungsi di bawah ini dan tentukan pula jenisnya
    a. $f(x)=x^3$
    b. $f(x)=x^3-12x$
    c. $f(x)=x^3-3x^2+3x+4$
11. Suatu tali yang salah satu ujungnya diikat digerakkan, sehingga membentuk gelombang naik turun. Jika persamaan gelombang tali tersebut adalah $f(x)=2x^3+3x^2-12x-4$, tentukanlah interval naik dan turunnya gelombang yang dibentuk oleh tali tersebut!
12. Tentukanlah nilai stasioner, maksimum dan minimum dari fungsi berikut ini
    a. $y=f(x)=2x^2-x$
    b. $y=f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{5}{2}x^2+6x$
    c. $y=f(x)=x^3-6x^2+12x-10$
    a. $y=f(x)=x^3-6x^2+12x-6$ untuk $0\le x\le 3$
    b. $y=f(x)=(x-2)^2(x-5)$ untuk $0\le x\le 2$
13. Diketahui fungsi $y=f(x)=ax^3+bx^2$ dengan a dan b konstan, memiliki titik stasioner pada titik (1, –1). Tentukan nilai a dan b.
14. Seorang peneliti sedang mengamati gelombang di sebuah laut pantai Kuta. Dalam sebuah pengamatan, terjadi sebuah gelombang laut dengan persamaan $f(x)=\frac{1}{3}x^3-2x^2-5x+6$.

Peneliti tersebut mengukur ketinggian maksimum dari gelombang tersebut. Tentukanlah tinggi gelombang tersebut!

15. Sebuah benda bergerak dengan persamaan posisi $s = t^3 + 3t^2 - 9t + 27$, s dalam meter dan t dalam sekon. Tentukanlah :
    a. persamaan kecepatan benda
    b. persamaan percepatan benda
    c. jarak maksimum yang dapat ditempuh oleh benda tersebut

**TUGAS KELOMPOK**

1. Setiap kelompok mencari penerapan Turunan Fungsi Aljabar melalui internet, jurnal ilmiah dan makalah-makalah dalam bidang fisika, ekonomi, maupun bidang lainnya. Buatlah penyelesaian dari permasalahan-permasalahan yang ada tersebut dengan uraian langkahnya
2. Presentasikan hasilnya di depan kelompok yang lain