

LIMIT FUNGSI ALJABAR

IRVAN DEDY, S.Pd.,M.Pd

Pernahkah kalian mencoba menghitung kecepatan dan percepatan yang dialami sebuah mobil yang bergerak selama t sekon? Jika persamaan gerak mobil tersebut memenuhi persamaan $s(t) = (t^2 + 4t)$ meter, maka berapakah kecepatan dan percepatan mobil tersebut tepat pada saat $t = 3$ sekon?. Permasalahan di atas merupakan permasalahan pada bidang Fisika yang pemecahannya menggunakan bantuan konsep limit fungsi.

A. Pengertian Limit Fungsi

- Limit merupakan nilai pendekatan. Limit fungsi $f(x)$ untuk $x \rightarrow a$ dapat dituliskan dengan $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$. Jika $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$, maka secara sederhana dapat dikatakan bahwa $f(x)$ mendekati nilai untuk x mendekati nilai a .
- syarat suatu fungsi limit mempunyai nilai limit apabila : limit kiri sama dengan limit kanan.
 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$, jika $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$

B. Teorema Limit Fungsi

- Beberapa teorema limit yang sering digunakan untuk menentukan limit fungsi aljabar yang sering dikenal dengan sifat-sifat limit fungsi aljabar
 1. Jika $f(x) = k$, maka $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = k$ (untuk tiap k konstanta dan a bilangan real)
Dikatakan : **Limit suatu fungsi konstanta nilainya sama dengan konstanta itu**
 2. Jika $f(x) = x$, maka $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = a$ (untuk tiap a , bilangan real)
Dikatakan : **Limit suatu fungsi identitas nilainya sama dengan nilai pendekatan peubahnya**
 3. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ (untuk tiap a , bilangan real)
Dikatakan : **Limit suatu fungsi adalah dengan mensubstitusi nilai pendekatannya**
 4. $\lim_{x \rightarrow a} \{f(x) \pm g(x)\} = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} g(x)$
Dikatakan : **Limit jumlah/selisih beberapa fungsi sama dengan jumlah/selisih masing masing limit fungsi**
 5. Jika k konstanta, maka $\lim_{x \rightarrow a} k f(x) = k \lim_{x \rightarrow a} f(x)$
Dikatakan : **Limit hasil kali konstanta dengan fungsi sama dengan hasil kali konstanta dengan limit fungsi itu**
 6. $\lim_{x \rightarrow a} \{f(x) \cdot g(x)\} = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x)$
Dikatakan : **Limit hasil kali beberapa fungsi sama dengan hasil kali masing masing limit fungsi**
 7. $\lim_{x \rightarrow a} \left\{ \frac{f(x)}{g(x)} \right\} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}$ dengan $\lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0$
Dikatakan : **Limit hasil bagi beberapa fungsi sama dengan hasil bagi masing masing limit fungsi**

$$8. \lim_{x \rightarrow a} \{f(x)\}^n = \{\lim_{x \rightarrow a} f(x)\}^n$$

Dikatakan : **Limit fungsi pangkat n sama dengan pangkat n dari fungsi limit itu**

C. Limit fungsi aljabar untuk $x \rightarrow a$

- Pada prinsipnya, perhitungan mencari nilai limit suatu fungsi pertama-tama yang dilakukan adalah mensubstitusi langsung.
- Jika dengan substitusi langsung diperoleh bentuk-bentuk tak tentu $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, \infty - \infty$, perhitungan mencari limit dengan cara lain.
- Pada fungsi yang berbentuk pecahan, apabila dengan cara substitusi langsung $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ menghasilkan $\frac{f(a)}{g(a)} = \frac{0}{0}$ atau nilai tak tentu, maka perhitungan limit dilakukan dengan cara memfaktorkan.
- Langkah yang dapat dilakukan untuk menggunakan cara faktorisasi adalah :
 - a. Substitusi langsung ke fungsi, jika diperoleh bentuk-bentuk tak tentu $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, \infty - \infty$ maka kita lakukan cara lain (memfaktorkan)
 - b. Fungsi $f(x)$ dan $g(x)$ diusahakan agar mempunyai faktor yang sama dengan $(x - a)$, sehingga $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x-a)P(x)}{(x-a)Q(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(a)}{Q(a)}$, $P(a) \neq 0$ dan $Q(a) \neq 0$
 - c. Jika $P(a) = 0$ dan $Q(a) = 0$, fungsi $P(x)$ dan $Q(x)$ kita faktorisasi lebih lanjut dengan faktor yang sama dengan $(x - a)$
- Cara perkalian sekawan digunakan pada limit fungsi yang memuat bentuk-bentuk pecahan bentuk akar.

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{\sqrt{f(x)} - \sqrt{g(x)}}{h(x)} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow c} \frac{\sqrt{f(x)} - \sqrt{g(x)}}{h(x)} \cdot \frac{\sqrt{f(x)} + \sqrt{g(x)}}{\sqrt{f(x)} + \sqrt{g(x)}}$$

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{h(x)}{\sqrt{f(x)} - \sqrt{g(x)}} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow c} \frac{h(x)}{\sqrt{f(x)} - \sqrt{g(x)}} \cdot \frac{\sqrt{f(x)} + \sqrt{g(x)}}{\sqrt{f(x)} + \sqrt{g(x)}}$$

D. Limit fungsi aljabar untuk $x \rightarrow \infty$

- Jika $h(x)$ adalah fungsi pecahan polinom dalam bentuk $\frac{f(x)}{g(x)}$, maka nilai

$$\lim_{x \rightarrow \infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)}$$

akan menghasilkan bentuk tak tentu $\frac{\infty}{\infty}$ dengan substitusi langsung.

Untuk itu, perhitungan limit yang berbentuk $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ dilakukan dengan membagi pembilang $f(x)$ dan penyebut $g(x)$ dengan pangkat tertinggi dari x yang muncul pada $f(x)$ dan $g(x)$.

- Untuk bentuk $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) - g(x)$ jika hasilnya dalam bentuk $(\infty - \infty)$ maka gunakan perkalian sekawan

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{ax+b} - \sqrt{px+q} = \begin{cases} \infty, & \text{jika } a > p \\ 0, & \text{jika } a = p \\ -\infty, & \text{jika } a < p \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{ax^2 + bx + c} - \sqrt{px^2 + qx + r} = \begin{cases} \infty, & \text{jika } a > p \\ \frac{b-q}{2\sqrt{a}}, & \text{jika } a = p \\ -\infty, & \text{jika } a < p \end{cases}$$

Diskusikan Penyelesaian Soal-Soal Berikut !!!

1. Tentukan nilai dari $\lim_{x \rightarrow 3} \sqrt{x^2 + 2x - 3}$
2. Tentukan nilai dari $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 2x - 3}{x + 1} = \dots$
3. Tentukan nilai dari $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 5x}{x^2 - 2x}$
4. Tentukan nilai dari $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3}$
5. Tentukan nilai dari $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 15x + 36}$
6. Tentukan nilai dari $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x - 2} = \dots$
7. Tentukan nilai dari $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x^2 - 1} = \dots$
8. Tentukan nilai dari $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 - 3x^2}{x^2 - x} = \dots$
9. Tentukan nilai dari $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{2 - \sqrt{x}}{4 - x}$
10. Hitunglah nilai dari $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2+x} - \sqrt{2-x}}{x}$
11. Hitunglah nilai dari $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - 2}{\sqrt{x} - \sqrt{2}}$
12. Tentukan nilai dari $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{\sqrt{x+1} - 2}$
13. Tentukan nilai dari $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x^2 - 1}$

14. Tentukanlah nilai dari $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 - \sqrt{9 - 9x}}{3x}$
15. Hitunglah nilai dari $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{7x-5} - \sqrt{3x+7}}{x-3}$
16. Hitunglah nilai limit dari $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x+1}{2x-1}$
17. Tentukanlah nilai dari $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8x^3 + 7x^2 + 1}{2x^3 + 2x - 1}$
18. Tentukan nilai dari $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x^3 + 2x^2 - 1}{2x^2 + 2x + 12}$
19. Tentukan nilai limit dari $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{4x+6} - \sqrt{4x-4} = \dots$
20. Tentukan nilai dari $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x^2 + 4x + 6} - \sqrt{x^2 + 2x - 4}$
21. Tentukan nilai dari $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{2x^2 + x + 6} - \sqrt{x^2 + 3x - 5}$

Latihan Soal (kerjakan di buku latihan dengan menggunakan cara)

1. Tentukan nilai dari $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^3 - 2x^2}{x^2 + 1} = \dots$
2. Tentukan nilai dari $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+2)(2x-1)}{3x+1} = \dots$
3. Tentukan nilai dari $\lim_{x \rightarrow 5} \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} = \dots$
4. Tentukan nilai dari $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 6x - 16}{4x + 8}$
5. Tentukan nilai dari $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2 - 4x - 4}{2x^2 + 5x - 18}$
6. Tentukan nilai dari $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4 - x^3 - 6x^2}{x^5 + 7x^2}$
7. Tentukan nilai dari $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1}$
8. Tentukan nilai dari $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{2 - \sqrt{x+3}}$
9. Tentukan nilai dari $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3 - \sqrt{4x+1}}{x-2}$
10. Tentukan nilai dari $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 3x - 4}{\sqrt{x} - 1}$

11. Tentukan nilai dari $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{2x-1}}{\sqrt{2x-3} - \sqrt{x}}$
12. Tentukan nilai dari $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^3 + 6x^2 + 7}{6x^3 + 2x - 9} = \dots$
13. Tentukan nilai dari $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-7x^5 + 6x^2 - 10}{2x^3 + 3x^2 + 4}$
14. Tentukan nilai dari $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(5x-1)^3}{5x^4 - 4x^2 - 3x + 2}$
15. Tentukan nilai dari $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + x}{3x^7 - 36}$
16. Tentukan nilai dari $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}}$
17. Tentukan nilai dari $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{8x+6} - \sqrt{8x-4}$
18. Tentukan nilai dari $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{2x-3} - \sqrt{6x-7}$
19. Tentukan nilai dari $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{8x+3} - \sqrt{4x+7}$
20. Tentukan nilai dari $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{2x^2 + 6x + 5} - \sqrt{2x^2 - 4x - 1}$
21. Tentukan nilai dari $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x^2 + 3x + 5} - \sqrt{2x^2 - 5x - 6}$
22. Tentukan nilai dari $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x^2 + 8x + 12} - x - 2$
23. Tentukan nilai dari $\lim_{x \rightarrow \infty} 2x - 1 - \sqrt{4x^2 - x + 1}$

TUGAS KELOMPOK

1. Setiap kelompok mencari penerapan Limit Fungsi Aljabar melalui internet, jurnal ilmiah dan makalah-makalah dalam bidang fisika, ekonomi, maupun bidang lainnya. Buatlah penyelesaian dari permasalahan-permasalahan yang ada tersebut dengan uraian langkahnya
2. Presentasikan hasilnya di depan kelompok yang lain