

LIMIT DIKETAKHINGGAAN

Irvan Dedy, S.Pd.,M.Pd

Limit fungsi, secara tidak sadar digunakan dalam bidang kedokteran. Seseorang yang menderita rabun jauh akan memakai kacamata lensa cekung agar dapat melihat dengan normal. Oleh karena itu, ia meminta bantuan seorang dokter. Mula-mula dokter tersebut memeriksa dan menguji jarak pandang pasien untuk mengetahui seberapa parah penyakitnya. Setelah itu, dokter tersebut harus menentukan jarak fokus lensa cekung kacamata dari pasien tersebut.

A. Pengertian Limit diketakhinggaan

- Limit diketakhinggaan Fungsi Aljabar sering disebut Limit fungsi untuk $x \rightarrow \infty$
- Perlu kita ketahui, bahwa lambang ∞ (dibaca: tak hingga) digunakan untuk menyatakan nilai bilangan yang semakin besar.
- ∞ bukan merupakan lambang bilangan dan tidak dapat dioperasikan secara aljabar sehingga *tidak benar* $\infty - \infty = 0$ atau $\frac{\infty}{\infty} = 1$

B. Menentukan Nilai Limit diketakhinggaan Fungsi Aljabar

- Bentuk limit fungsi aljabar dengan peubah mendekati tak berhingga yang sering kita jumpai adalah :
 1. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ dan
 2. $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) - g(x)$
- Cara menentukan nilai limit diketakhinggaan fungsi aljabar dengan tiga penyelesaian, yaitu substitusi, membagi pangkat tertinggi dan perkalian sekawan

C. Penyelesaian Limit diketakhinggaan Fungsi Aljabar

Secara umum menyelesaikan limit diketakhinggaan Fungsi Aljabar

1. Substitusi

- Cara substitusi ini adalah memasukkan langsung nilai $x \rightarrow \infty$ ke dalam fungsi limit.
- Hasil yang diperoleh memiliki dua kemungkinan, yaitu memiliki hasil tertentu dan tak tentu
- Jika kita substitusi langsung dan diperoleh dalam bentuk $\frac{\infty}{\infty}$ dan $(\infty - \infty)$ atau bentuk tak tentu, maka kita gunakan cara membagi pangkat tertinggi dan perkalian sekawan

2. Membagi dengan pangkat tertinggi

- Perhitungan limit yang berbentuk $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ dilakukan dengan membagi pembilang $f(x)$ dan penyebut $g(x)$ dengan pangkat tertinggi dari x yang muncul pada $f(x)$ dan $g(x)$.

3. Perkalian sekawan

- Untuk bentuk $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) - g(x)$ jika hasilnya dalam bentuk $(\infty - \infty)$ maka gunakan perkalian sekawan

a. Bentuk $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{ax+b} - \sqrt{px+q}$

b. Bentuk $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{ax^2 + bx + c} - \sqrt{px^2 + qx + r}$

D. Asimtot

- Asimtot adalah suatu garis lurus yang didekati oleh kurva lengkung dengan jarak semakin lama semakin kecil mendekati nol di jauh tak terhingga.
- Asimtot juga bisa diartikan dengan sebuah garis lurus yang sangat dekat dengan kurva lengkung di titik jauh tak terhingga.
- Asimtot dari sebuah fungsi berhubungan erat dengan pembagi nol dari fungsi tersebut
- Asimtot terbagi menjadi 3, yaitu asimtot datar, asimtot tegak dan asimtot miring.

1. Asimtot datar adalah garis tersebut sejajar dengan sumbu x.

Diberikan suatu konstanta k, garis $y = k$ merupakan asimtot horizontal dari fungsi $f(x)$ jika x bertambah tanpa batas, menyebabkan $f(x)$ mendekati k :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = b \text{ atau } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b$$

2. Asimtot tegak adalah garis tersebut sejajar dengan sumbu y

Diberikan suatu konstanta h, garis $x = h$ merupakan asimtot vertikal untuk fungsi V jika x mendekati h, $V(x)$ akan bertambah atau berkurang tanpa batas :

$$\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = \infty \text{ atau } \lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = \infty$$

3. Asimtot miring adalah garis tersebut tidak sejajar dengan sumbu x dan tidak sejajar dengan sumbu y.

E. Menentukan Nilai Limit diketakhinggaan Fungsi Trigonometri

Untuk menentukan/menghitung limit fungsi trigonometri di tak hingga dan limit tak hingga, digunakan sifat atau teorema :

Misal $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ berlaku untuk setiap x di dalam domainnya.

Jika $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} h(x) = L$ maka $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = L$

Diskusikan penyelesaian soal-soal berikut !!!

1. Hitunglah nilai limit dari $\lim_{x \rightarrow \infty} 2x^3 + x$
2. Hitunglah nilai limit dari $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{x} + 4$
3. Hitunglah nilai limit dari $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x + 1}{2x - 1}$
4. Tentukanlah nilai dari $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8x^3 + 7x^2 + 1}{2x^3 + 2x - 1}$
5. Tentukan nilai dari $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x^3 + 2x^2 - 1}{2x^2 + 2x + 12}$
6. Tentukan nilai dari $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 2x - 1}{2x^3 + 6x + 12}$
7. Tentukan nilai dari $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{4x + 6} - \sqrt{4x - 4} = \dots$
8. Tentukanlah nilai dari $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x - 3} - \sqrt{2x + 4} = \dots$
9. Tentukanlah nilai dari $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x}{x-1} - \frac{2x}{x+1} \right)$ adalah ...
10. Tentukan nilai dari $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x^2 + 4x + 6} - \sqrt{x^2 + 2x - 4}$
11. Tentukan nilai dari $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{2x^2 + x + 6} - \sqrt{x^2 + 3x - 5}$
12. Tentukan nilai dari $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x^2 - 4x + 2} - \sqrt{2x^2 + 6x}$
13. Tentukan nilai dari $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x^2 - 8x + 12} - \sqrt{x^2 + 6x - 1}$
14. Tentukanlah asimtot pada fungsi $f(x) = \frac{2x}{4-x}$
15. Tentukanlah asimtot pada fungsi $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$
16. Tentukanlah nilai dari $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x}$
17. Tentukanlah nilai dari $\lim_{x \rightarrow \infty} 2x - \tan\left(\frac{2}{x}\right)$
18. Tentukanlah nilai dari $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x}{\cos\left(\frac{1}{x}\right)}$
19. Tentukanlah nilai dari $\lim_{x \rightarrow \infty} x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$

20. Tentukanlah nilai dari $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{3}{x}}{2 \sin\left(\frac{2}{x}\right)}$
21. Tentukanlah nilai dari $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x \sin\left(\frac{2}{x}\right)}{x \tan\left(\frac{3}{x}\right)}$
22. Tentukanlah nilai dari $\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \left[\sec\left(\frac{2}{x}\right) - 1 \right]$
23. Tentukanlah nilai dari $\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \left[1 - \cos\left(\frac{4}{x}\right) \right]$
24. Tentukanlah asimtot pada fungsi $f(x) = \tan x$, dengan $0 \leq x \leq 2\pi$
25. Tentukanlah asimtot pada fungsi $f(x) = \frac{\cos x}{x+1}$
26. Tentukanlah asimtot pada fungsi $f(x) = \sec x$

Latihan Soal (kerjakan di buku latihan dengan menggunakan cara)

1. Tentukan nilai dari $\lim_{x \rightarrow \infty} x - \frac{3}{x} = \dots$
2. Tentukan nilai dari $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x-2}{x} = \dots$
3. Tentukan nilai dari $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x+4}{4x-5} = \dots$
4. Tentukan nilai dari $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x+4}{4x-5} = \dots$
5. Tentukan nilai dari $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^3 + 6x^2 + 7}{6x^3 + 2x - 9} = \dots$
6. Tentukan nilai dari $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 + 4x^2 - 6}{6x^2 + 4x + 9} = \dots$
7. Tentukan nilai dari $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + 4x - 1}{x^3 - 4x + 12} = \dots$
8. Tentukan nilai dari $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 + 3x + 1}{2x^2 - 7x} = \dots$
9. Tentukan nilai dari $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-7x^5 + 6x^2 - 10}{2x^3 + 3x^2 + 4} = \dots$

10. Tentukan nilai dari $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(5x-1)^3}{5x^4 - 4x^2 - 3x + 2}$
11. Tentukan nilai dari $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + x}{3x^7 - 36}$
12. Tentukan nilai dari $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{8x+6} - \sqrt{8x-4}$
13. Tentukan nilai dari $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{2x+1} + \sqrt{2x-1}$
14. Tentukan nilai dari $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{2x-9} - \sqrt{4x+4}$
15. Tentukan nilai dari $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{8x+3} - \sqrt{4x+7}$
16. Tentukan nilai dari $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{2x^2 + 6x + 5} - \sqrt{2x^2 - 4x - 1}$
17. Tentukan nilai dari $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x^2 + 3x + 5} - \sqrt{2x^2 - 5x - 6}$
18. Tentukan nilai dari $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x^2 + 8x + 12} - x - 2$
19. Tentukan nilai dari $\lim_{x \rightarrow \infty} 2x - 1 - \sqrt{4x^2 - x + 1}$
20. Tentukan nilai dari $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x^2 - 2x + 1} - (x + 3)$
21. Gambarkan dan tentukan asimtot dari $y = f(x) = \frac{2x-4}{x-1}$
22. Gambarkan dan tentukan asimtot dari $y = f(x) = \frac{2x}{x^2-1}$
23. Tentukan nilai dari $\lim_{x \rightarrow \infty} \sin\left(\frac{1}{x}\right) = \dots$
24. Tentukan nilai dari $\lim_{x \rightarrow \infty} x \tan\left(\frac{1}{x}\right) = \dots$
25. Tentukan nilai dari $\lim_{x \rightarrow \infty} \sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2}{x}\right) = \dots$
26. Tentukan nilai dari $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2}{x}}{\sin\left(\frac{5}{x}\right)} = \dots$
27. Tentukan nilai dari $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 \tan\left(\frac{3}{x}\right)}{5 \sin\left(\frac{2}{x}\right)} = \dots$

28. Tentukan nilai dari $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x \sin\left(\frac{4}{x}\right)}{\tan^2\left(\frac{1}{x}\right)} = \dots$

29. Tentukan nilai dari $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin 4x - \sin 2x}{x \tan x} = \dots$

30. Tentukan nilai dari $\lim_{x \rightarrow \infty} x \left(1 - \cos \frac{1}{x}\right) = \dots$

31. Gambarkan dan tentukan asimtot dari $y = f(x) = \frac{\sin x}{2 - x}$

32. Gambarkan dan tentukan asimtot dari $y = f(x) = \cot x$

TUGAS KELOMPOK

1. Setiap kelompok mencari penerapan limit fungsi trigonometri melalui internet, jurnal ilmiah dan makalah-makalah dalam bidang fisika, ekonomi, maupun bidang lainnya. Buatlah penyelesaian dari permasalahan-permasalahan yang ada tersebut dengan uraian langkahnya
2. Presentasikan hasilnya di depan kelompok yang lain