

# INTEGRAL FUNGSI ALJABAR

IRVAN DEDY, S.Pd.,M.Pd

Setiap hal di alam ini selalu mempunyai kebalikannya atau dalam bahasa matematika sering disebut invers. Invers dari penjumlahan adalah pengurangan, invers dari perkalian adalah pembagian, invers dari sehat adalah sakit, dan seterusnya. Begitu juga dengan integral yang merupakan invers dari turunan. Seorang pembalap mobil harus mampu memperkirakan jarak tempuh maksimum kendaraannya pada kecepatan tertentu. Perkiraan jarak tempuh ataupun kecepatan yang harus digunakan dapat dilakukan dengan menggunakan integral.

## A. Pengertian Integral

- Turunan suatu fungsi  $f(x)$  yaitu  $f'(x)$  dan kita diminta untuk menentukan  $f(x)$ . Penentuan fungsi  $f(x)$  berdasarkan turunannya atau  $f'(x)$  disebut dengan pengintegralan.
- Perhatikan ilustrasi berikut

Pendiferensialan/Turunan	
$F(x)$	$F'(x)$
Pengintegralan	
$x^2$	$2x$
$x^2 - 20$	$2x$
$x^2 - 5$	$2x$
$x^2 + 7$	$2x$
$x^2 + 100$	$2x$
.	.
.	.
.	.
$x^2 + c$	$2x$

- Dari tabel di atas, terlihat bahwa untuk fungsi  $F(x)$  yang berbeda-beda memberikan nilai  $F'(x)$  yang sama. Tetapi jika operasi sebaliknya (integral) dilakukan akan memberikan  $F(x)$  dengan konstanta yang berbeda atau tak dapat ditentukan.

## B. Integral Tak Tentu

- Notasi matematika untuk pengintegralan adalah  $\int$ , sehingga penulisan integral suatu fungsi  $f(x)$  dapat dinotasikan dengan  $\int f(x) dx$
- Secara umum, jika  $F'(x)$  menyatakan turunan pertama dari  $F(x)$ , maka dapat dituliskan  $\int F'(x) dx = F(x) + c$

### C. Rumus Integral Tak Tentu

- Rumus umum integral :  $\int ax^n dx = \frac{a}{n+1} x^{n+1} + c$ , dengan  $n \neq 1$

### D. Sifat-Sifat Integral Tak Tentu Fungsi Aljabar

- Misalkan  $f(x)$  dan  $g(x)$  masing-masing adalah fungsi yang dapat diintegrasikan dan  $c$  adalah konstanta, maka :
  - a.  $\int 1 dx = \int dx = x + c$
  - b.  $\int k dx = kx + c$
  - c.  $\int [f(x) \pm g(x)] dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$
  - d.  $\int kf(x) dx = k \int f(x) dx$

### E. Menentukan F(x) jika diketahui F'(x) dan F(a)

- Kita dapat menggunakan Integral tak tentu untuk menentukan fungsi  $F(x)$  apabila  $F'(x)$  diketahui dan  $F(a) = k$ , dimana  $a$  dan  $k$  konstanta.
- Beberapa langkah yang harus diperhatikan adalah :
  - a. Tentukan  $F(x) = \int F'(x) dx$
  - b. Tentukan nilai konstanta integrasi  $c$
  - c. Tulis persamaan  $F(x)$

### F. Menentukan Persamaan kurva $y = F(x)$ jika diketahui $\frac{dy}{dx}$ dan Sebuah Titik pada Kurva

- Untuk menentukan sebuah kurva dengan persamaan  $y = F(x)$  dengan diketahui gradien garis singgung  $\left( m = \frac{dy}{dx} = F'(x) \right)$  di titik  $P(x,y)$  maka kita dapat melakukannya dengan menggunakan langkah berikut :
  - a. Integrasikan  $m = \frac{dy}{dx} = F'(x)$   
 $\Leftrightarrow dy = F'(x) dx$   
 $\Leftrightarrow y = \int F'(x) dx = F(x) + c$
  - b. Tentukan nilai konstanta integrasi  $c$
  - c. Tulis persamaan  $F(x)$

### G. Masalah Kecepatan dan Percepatan

- Laju benda ( $v$ ) pada saat  $t$  diketahui, maka posisi benda pada sembarang waktu  $t$  dapat ditentukan dengan rumus  $s = \int v dt$ .
- Percepatan benda ( $a$ ) pada saat  $t$  diketahui, maka laju benda pada sembarang waktu  $t$  dapat ditentukan dengan rumus  $v = \int a dt$

## H. Teknik Pengintegralan

### ▪ Pengintegralan dengan Teknik Substitusi

Teknik substitusi mempunyai aturan :

a. Jika  $u = g(x)$  dan  $g(x)$  merupakan fungsi yang mempunyai turunan, maka

$$\int f(g(x))g'(x)dx \text{ dapat diubah menjadi } \int f(u)du.$$

b. Jika  $F(u)$  adalah anti turunan dari  $f(u)$  maka

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(u)du = F(u) + c = F(g(x)) + c$$

### ▪ Pengintegralan dengan Teknik Parsial

Teknik integral parsial didasarkan pada pengintegralan turunan hasil kali dua fungsi

Andaikan  $u = f(x)$  dan  $v = g(x)$  maka  $D_x[f(x)g(x)] = f(x)g'(x) + g(x)f'(x)$

Dengan mengintegrasikan kedua ruas persamaan, maka kita peroleh

$$f(x)g(x) = \int f(x)g'(x)dx + \int g(x)f'(x)dx$$

$$\text{atau } \int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int g(x)f'(x)dx$$

karena  $du = f'(x)dx$   $dv = g'(x)dx$  maka dapat dituliskan rumus pengintegral teknik

$$\text{parsial } \int u dv = u.v - \int v du$$

## I. Integral Tentu (Pengayaan)

▪ Jika fungsi  $f$  terdefinisi pada interval  $[a, b]$ , maka  $\int_a^b f(x)dx$  adalah integral tertentu terhadap fungsi  $f$  dari  $a$  ke  $b$ .

▪ Bentuk integral tentu dinotasikan  $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b F'(x)dx = F(x)|_a^b = F(b) - F(a)$  dengan :

$f(x)$  = fungsi integran

$a$  = batas bawah

$b$  = batas atas

▪ Integral tertentu  $\int_a^b f(x)dx$  adalah bilangan, sedangkan integral tak tentu adalah fungsi

▪ Jika  $f$  dan  $g$  terintegralkan pada interval  $[a, b]$  dan  $k$  suatu konstanta, maka

$$a. \int_a^a f(x)dx = 0$$

$$d. \int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$$

$$b. \int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

$$e. \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx$$

$$c. \int_a^b kf(x)dx = k \int_a^b f(x)dx$$

### Diskusikan Penyelesaian Soal-Soal Berikut !!!

1. Tentukan hasil dari  $\int 3x^2 dx$  !
2. Tentukanlah Integral dari  $\int x^{\frac{1}{2}} dx$  !
3. Hasil dari  $\int \frac{2}{x^4} dx$  adalah ...
4. Hasil dari  $\int \sqrt[5]{x^4} dx$  adalah ...
5. Tentukan hasil dari  $\int \frac{1}{\sqrt[4]{x^3}} dx$  !
6. Tentukan hasil dari  $\int (6x^2 + 2x - 3) dx$
7. Tentukan integral dari  $\int (3x+5)^2 dx$  !
8. Tentukan integral dari  $\int (x-3)(x+2) dx$  !
9. Hasil dari  $\int \frac{x^5 - x^3}{x^2} dx$  adalah ...
10. Tentukan hasil integral dari  $\int \sqrt[3]{(5x+4)^2} dx$
11. Tentukan hasil integral dari  $\int (x^2 - 3x + 1)^4 (2x - 3) dx$
12. Tentukan hasil integral dari  $\int (x+2)(x^2 + 4x - 1)^5 dx$
13. Tentukan hasil integral dari  $\int \frac{3x}{\sqrt{x^2 - 9}} dx$
14. Tentukanlah fungsi  $F(x)$  jika diketahui  $F'(x) = 3x + 4$  dan  $F(2) = -1$
15. Tentukanlah  $F(x)$  jika diketahui  $F'(x) = 9x^2 + 6x - 3$  dan untuk  $x = -1$  maka  $F(x)$  bernilai 3
16. Tentukanlah  $F(x)$  jika diketahui  $F''(x) = 48x - 8$ ,  $F'(0) = 3$  dan  $F(1) = -1$
17. Tentukan  $F(x)$  jika diketahui  $F''(x) = 12x$ , untuk  $x = 1$  fungsi  $F(x)$  bernilai 3 dan untuk  $x = 2$  fungsi  $F(x)$  bernilai 0
18. Sebuah garis singgung pada kurva  $y = F(x)$  di titik  $(2,5)$  mempunyai gradien  $4x$ . tentukanlah persamaan kurva tersebut!
19. Tentukan persamaan kurva jika diketahui bahwa gradien garis singgungnya  $3x^2$  dan kurva melalui  $(1, 2)$
20. Jika gradien persamaan garis singgung pada sebuah kurva pada titik  $(2,-1)$  adalah  $m = \frac{dy}{dx} = 6x^2 - 2x + 1$ , maka tentukanlah persamaan kurva tersebut!
21. Sebuah benda dilempar ke atas dengan persamaan kecepatan  $v = 12 - 3t^2$ . Pada saat  $t = 1$ , tinggi benda adalah 2. Jika  $v = \frac{dh}{dt}$ ,  $h$  menyatakan tinggi benda, maka nyatakanlah persamaan  $h$  dalam  $t$ !

**Latihan Soal (kerjakan di buku latihan dengan menggunakan cara)**

1. Tentukan hasil dari integral berikut!

a.  $\int 7x^3 dx$

b.  $\int -5x^{-2} dx$

c.  $\int 6x^{\frac{1}{2}} dx$

d.  $\int \frac{5}{2} x^{-\frac{2}{5}} dx$

e.  $\int \frac{-4}{x^3} dx$

f.  $\int \frac{5}{2x^5} dx$

g.  $\int \frac{8}{x^2 \sqrt{x}} dx$

h.  $\int 2x^3 - 4x^2 + 6x - 4 dx$

i.  $\int 6x^{-2} - 4\sqrt{x} + 3x - 1 dx$

j.  $\int (3x-1)^2 dx$

k.  $\int (x+3)(2x+4) dx$

l.  $\int \frac{x^3 - 4x^2 + 5}{x} dx$

2. Tentukan hasil dari integral berikut ini!

a.  $\int (5x+4)^3 dx$

b.  $\int \frac{2}{(2x-5)^3} dx$

c.  $\int \sqrt[4]{(4x+3)^3} dx$

d.  $\int \frac{1}{\sqrt{6x-8}} dx$

e.  $\int (x+1)(3x^2 + 6x + 7)^5 dx$

f.  $\int 3x\sqrt{x^2 - 7} dx$

3. Tentukan fungsi F(x) jika diketahui

a.  $F'(x) = 6x + 4$  dan  $F(-1) = 2$

b.  $F'(x) = 8x^3 - 6x^2 - 4x + 5$  dan  $F(-1) = 0$

c.  $F'(x) = 3x^2 - 5$  dan untuk  $x = 1$  maka nilai F(x) adalah 2

d.  $F'(x) = (x+2)^2$  dan untuk  $x = -1$  maka nilai F(x) adalah -5

e.  $F''(x) = 18x - 4$ ,  $F'(0) = -1$  dan  $F(1) = -2$

f.  $F''(x) = 14$ ,  $F(2) = -3$  dan  $F(-1) = 5$

g.  $F''(x) = 8 - 12x$ ,  $F(-1) = 4$  dan  $F(0) = -3$

4. Tentukan persamaan kurva jika diketahui

a.  $\frac{dy}{dx} = 12x + 3$ , kurva melalui titik (2, -1)

b.  $\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 2x + 3$ , kurva melalui titik (0, 4)

c. gradien garis singgungnya  $4x - 2$  dan melalui titik (0, 2)

d. garis singgung pada kurva  $y = F(x)$  di titik (-2,4) mempunyai gradien garis singgung pada kurva  $y = F(x)$  di titik (-1,3) mempunyai gradient yang sejajar dengan garis  $2x - y + 5 = 0$

5. Sebuah benda dilempar ke atas dengan persamaan kecepatan  $v = 3t^2 + 8$ . Pada saat  $t = 2$ , tinggi benda adalah 20. Jika  $v = \frac{dh}{dt}$ , h menyatakan tinggi benda. Nyatakan persamaan h dalam t !
6. Biaya marginal suatu perusahaan ditunjukkan oleh  $MC(Q) = 4Q^2 - 3Q + 5$  dengan Q sama dengan biaya unit. Jika biaya tetap adalah  $k = 3$  dengan merupakan konstanta integral, maka persamaan biaya total  $C(Q)$  adalah ....

### **TUGAS KELOMPOK**

1. Setiap kelompok mencari penerapan Integral Fungsi Aljabar melalui internet, jurnal ilmiah dan makalah-makalah dalam bidang fisika, ekonomi, maupun bidang lainnya. Buatlah penyelesaian dari permasalahan-permasalahan yang ada tersebut dengan uraian langkahnya
2. Presentasikan hasilnya di depan kelompok yang lain