PENERAPAN TURUNAN FUNGSI

A. Turunan Fungsi Trigonometri

Rumus dasar turunan fungsi trigonometri adalah turunan fungsi sinus dan kosinus, yang diperoleh dari konsep limit, yakni sebagai berikut :

Jika f(x) = sin x   maka :

$$f\,'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h}$$

$$f\,'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{2.\cos\frac{1}{2}\{(x+h)+x\}.\sin\frac{1}{2}\{(x+h)-x\}}{h}$$

$$f\,'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{2.\cos\frac{1}{2}\{2x+h\}.\sin\frac{1}{2}\{h\}}{h}$$

$$f\,'(x) = \lim_{h \to 0} 2.\cos\frac{1}{2}(2x+h) \cdot \lim_{h \to 0} \frac{\sin\frac{1}{2}h}{h}$$

$$f\,'(x) = 2.\cos\frac{1}{2}(2x+0) \cdot \left(\frac{1/2}{1}\right)$$

$$f\,'(x) = 2.\cos x \cdot (1/2)$$

$$f\,'(x) = \cos x$$

Jadi dapat disimpulkan

> Jika y = sin x   maka   y' = cos x

Jika f(x) = cos x   maka :

$$f\,'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\cos(x+h) - \cos(x)}{h}$$

$$f\,'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{-2.\sin\frac{1}{2}\{(x+h)+x\}.\sin\frac{1}{2}\{(x+h)-x\}}{h}$$

$$f\,'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{-2.\sin\frac{1}{2}\{2x+h\}.\sin\frac{1}{2}\{h\}}{h}$$

$$f\,'(x) = \lim_{h \to 0} -2.\sin\frac{1}{2}(2x+h) \cdot \lim_{h \to 0} \frac{\sin\frac{1}{2}h}{h}$$

$$f'(x) = -2.\sin\frac{1}{2}(2x + 0) \cdot \left(\frac{1/2}{1}\right)$$

f '(x) = –2.sin x . (1/2)

f '(x) = –sin x

Jadi dapat disimpulkan

Jika y = cos x   maka   y' = –sin x

Dari rumus dasar tersebut, diturunkanlah rumus pengembangan, yakni turunan fungsi tangens, cotangens, secan dan cosecan. Proses pengembangan rumus tersebut adalah :

Diketahui f(x) = tan x   maka f(x) = $\dfrac{\sin x}{\cos x}$

Misalkan u = sin x   maka u' = cos x

v = cos x   maka v' = –sin x

Sehingga :   f'(x) = $\dfrac{u'.v - u.v'}{v^2}$

f'(x) = $\dfrac{(\cos x)(\cos x) - (\sin x)(-\sin x)}{\cos^2 x}$

f'(x) = $\dfrac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x}$

f'(x) = $\dfrac{1}{\cos^2 x}$

f'(x) = $\sec^2 x$

Jadi dapat disimpulkan

Jika y = tan x   maka   y' = $\sec^2 x$

Diketahui f(x) = cot x   maka f(x) = $\dfrac{\cos x}{\sin x}$

Misalkan u = cos x   maka u' = –sin x

v = sin x   maka v' = cos x

Sehingga :   f'(x) = $\dfrac{u'.v - u.v'}{v^2}$

f'(x) = $\dfrac{(-\sin x)(\sin x) - (\cos x)(\cos x)}{\sin^2 x}$

$$f'(x) = \frac{-(\sin^2 x + \cos^2 x)}{\cos^2 x}$$

$$f'(x) = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

$$f'(x) = -\csc^2 x$$

Jadi dapat disimpulkan

Jika y = cot x   maka $y' = -\csc^2 x$

Diketahui f(x) = sec x   maka f(x) = $\dfrac{1}{\cos x}$

Misalkan u = 1   maka u' = 0

v = cos x   maka v' = –sin x

Sehingga :   f'(x) = $\dfrac{u'.v - u.v'}{v^2}$

$$f'(x) = \frac{(0)(\cos x) - (1)(-\sin x)}{\cos^2 x}$$

$$f'(x) = \frac{\sin x}{\cos^2 x}$$

$$f'(x) = \frac{1}{\cos x} \cdot \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$f'(x) = \sec x \tan x$$

Jadi dapat disimpulkan

Jika y = sec x   maka $y' = \sec x \tan x$

Diketahui f(x) = csc x   maka f(x) = $\dfrac{1}{\sin x}$

Misalkan u = 1   maka u' = 0

v = sin x   maka v' = cos x

Sehingga :   f'(x) = $\dfrac{u'.v - u.v'}{v^2}$

$$f'(x) = \frac{(0)(\sin x) - (1)(\cos x)}{\sin^2 x}$$

$$f'(x) = \frac{-\cos x}{\sin^2 x}$$

$$f'(x) = \frac{-1}{\sin x} \cdot \frac{\cos x}{\sin x}$$

$$f'(x) = -\csc x \cot x$$

Jadi dapat disimpulkan

> Jika y = csc x   maka   y' = $-\csc x \cot x$

Selanjutnya, terdapat rumus pengembangan turunan fungsi trigonometri dengan aturan rantai, yakni sebagai berikut :

Misalkan u(x) adalah fungsi yang terdefinisi pada x bilangan real dan f(u) = sin u, maka untuk y = f [u(x)] diperoleh y' = f ' [u(x)]. u'(x)

$$y' = (\cos u)(u')$$
$$y' = u'.\cos u$$

Sehingga dengan cara yang sama dapat disimpulkan bahwa jika u adalah fungsi yang terdefinisi pada bilangan real, maka diperoleh:

Untuk y = sin u   maka   y' = u'.cos u

Untuk y = cos u   maka   y' = –u'.sin u

Untuk y = tan u   maka   y' = u'. $\sec^2 u$

Untuk y = cot u   maka   y' = $-u'.\csc^2 u$

Untuk y = sec u   maka   y' = u'. $\sec u \tan u$

Untuk y = csc u   maka   y' = $-u' \csc u \cot u$

Untuk lebih jelasnya ikutilah contoh soal berikut ini :

01. Tentukanlah turunan pertama dari setiap fungsi berikut ini :

    (a) f(x) = cos (3x – 4)

    (b) f(x) = 3.tan (x^2 – 4)

    (c) f(x) = cot (2x + 5) – 5.sec(x^2 – 4)

    (d) f(x) = $4x^2$ – sec($2x^2$ + 3x)

    Jawab

    (a) f(x) = cos (3x – 4)

        Maka f '(x) = (3)(–sin(3x – 4))

            f '(x) = –3.sin(3x – 4)

    (b) f(x) = 3.tan (x^2 – 4)

        Maka f '(x) = (2x)($3 \sec^2 (x^2 - 4)$)

            f '(x) = 6x. $\sec^2 (x^2 - 4)$

    (c) f(x) = cot (2x + 5) – 5.sec(x^2 – 4)

        Maka f '(x) = (2)($-\sec^2 (2x + 5)$) – (2x)(5.sec(x^2 – 4).tan(x^2 – 4))

            f '(x) = $-2 \sec^2 (2x + 5)$ – 10x.sec(x^2 – 4).tan(x^2 – 4))

(d) $f(x) = 4x^2 - \sec(2x^2 + 3x)$

   Maka $f'(x) = 8x - (4x + 3)(\sec(2x^2 + 3x).\tan(2x^2 + 3x))$

02. Tentukanlah turunan pertama dari setiap fungsi berikut ini :

   (a) $f(x) = \sin(3x + 2).\cos(3x - 3)$

   (b) $f(x) = \dfrac{\cos(2x-5)}{\sec(2x-5)}$

   (c) $f(x) = 5.\sec^3 x$

   (d) $f(x) = \text{ctg}\sqrt{(4x-2)^3}$

   (e) $f(x) = \sin^4(3x+5)$

   Jawab

   (a) $f(x) = \sin(3x + 2).\cos(3x - 3)$

   Misalkan $u = \sin(3x + 2)$ maka $u' = 3.\cos(3x + 2)$

   $v = \cos(3x - 3)$ maka $v' = -3.\sin(3x - 3)$

   Jadi $f'(x) = u'.v + u.v'$

   $f'(x) = \{3.\cos(3x + 2)\}\{\cos(3x - 3)\} + \{\sin(3x + 2)\}\{-3.\sin(3x - 3)\}$

   $f'(x) = 3.\cos(3x + 2).\cos(3x - 3) - 3.\sin(3x + 2).\sin(3x - 3)$

   $f'(x) = 3.\{\cos(3x + 2).\cos(3x - 3) - \sin(3x + 2).\sin(3x - 3)\}$

   $f'(x) = 3.\cos[(3x + 2) + (3x - 3)]$

   $f'(x) = 3.\cos(6x - 1)$

   (b) $f(x) = \dfrac{\cos(2x-5)}{\sec(2x-5)}$

   Misalkan $u = \cos(2x - 5)$ maka $u' = -2.\sin(2x - 5)$

   $v = \sec(2x - 5)$ maka $v' = 2.\sec(2x - 5).\tan(2x - 5)$

   jadi $f'(x) = \dfrac{u'.v - u.v'}{v^2}$

   $f'(x) = \dfrac{-2\sin(2x-5).\sec(2x-5) - 2\cos(2x-5)\sec(2x-5)\tan(2x-5)}{\sec^2(2x-5)}$

   $f'(x) = \dfrac{-2\sin(2x-5).\dfrac{1}{\cos(2x-5)} - 2\cos(2x-5)\dfrac{1}{\cos(2x-5)}\tan(2x-5)}{\sec^2(2x-5)}$

   $f'(x) = \dfrac{-2\tan(2x-5) - 2\tan(2x-5)}{\sec^2(2x-5)}$

   $f'(x) = -4\tan(2x-5).\dfrac{1}{\sec^2(2x-5)}$

   $f'(x) = -4\left(\dfrac{\sin(2x-5)}{\cos(2x-5)}\right)\left(\dfrac{\cos^2(2x-5)}{1}\right)$

   $f'(x) = -4.\sin(2x-5).\cos(2x-5)$

(c) f(x) = $5.\sec^3 x$

   f(x) = $5.(\sec x)^3$

   Misalkan   u = sec x   maka u' = sec x . tan x

   jadi   f '(x) = $5.(3)(\sec x)^2 (\sec x \cdot \tan x)$

   f '(x) = $15\sec^3 x \cdot \tan x$

(d) f(x) = $\text{ctg} \sqrt{(4x-2)^3}$

   f(x) = $\text{ctg}(4x-2)^{3/2}$

   Misalkan   u = $(4x-2)^{3/2}$ maka   u' = $\dfrac{3}{2}(4x-2)^{1/2}(4)$

   u' = $8\sqrt{4x-2}$

   jadi   f '(x) = $\left(-\csc(4x-2)\right)\left(8\sqrt{4x-2}\right)$

   f '(x) = $-8\sqrt{4x-2}\,\csc(4x-2)$

(e) f(x) = $\sin^4(3x+5)$

   f(x) = $\left(\sin(3x+5)\right)^4$

   Misalkan   u = sin (3x + 5)   maka   u' = 3.cos (sx + 5)

   jadi   f '(x) = $4\left(\sin(3x+5)\right)^3 (3.\cos (3x + 5))$

   f '(x) = $12.\cos(3x+5)\sin^3(3x+5)$

03. Tentukanlah turunan pertama dari setiap fungsi berikut ini :

   (a) f(x) = $4\cos^2(3x-2) - 4\sin^2(3x-2)$

   (b) f(x) = 6.sin (x^2 – 4).cos (x^2 – 4)

   (c) f(x) = $\dfrac{\sin 2x}{\sin x} - \dfrac{\cos 2x}{\cos x}$

   Jawab

   (a) f(x) = $4\cos^2(3x-2) - 4\sin^2(3x-2)$

   f(x) = $4.[\cos^2(3x-2) - \sin^2(3x-2)]$

   f(x) = 4.cos 2(3x – 2)

   f(x) = 4.cos(6x – 4)

   Maka : f '(x) = 4.{–6.sin(6x – 4)}

   f '(x) = –24.sin(6x – 4)

   (b) f(x) = 6.sin (x^2 – 4).cos (x^2 – 4)

   f(x) = 3.{2.sin (x^2 – 4).cos (x^2 – 4)}

   f(x) = 3.sin 2(x^2 – 4)

   f(x) = 3.sin ($2x^2$ – 8)

   Maka : f '(x) = 3.{4x.sin($2x^2$ – 8)}

   f '(x) = 12x.sin($2x^2$ – 8)

(c) $f(x) = \dfrac{\sin 2x}{\sin x} - \dfrac{\cos 2x}{\cos x}$

$f(x) = \dfrac{2.\sin x.\cos x}{\sin x} - \dfrac{2\cos^2 x - 1}{\cos x}$

$f(x) = 2.\cos x - 2.\cos x + \dfrac{1}{\cos x}$

$f(x) = \sec x$

Maka : $f\,'(x) = \sec x.\tan x$

04. Tentukanlah nilai setiap turunan berikut ini untuk x bilangan real yang diberikan :

(a) $f(x) = 2.\sin (3x - \dfrac{2}{3}\pi)$ untuk $x = \dfrac{\pi}{2}$

(b) $f(x) = 8.\cos^3 x$ untuk $x = \dfrac{\pi}{3}$

Jawab

(a) $f(x) = 2.\sin (3x - \dfrac{2}{3}\pi)$ untuk $x = \dfrac{\pi}{2}$

Maka : $f\,'(x) = 6.\cos (3x - \dfrac{2}{3}\pi)$

$f\,'(\dfrac{\pi}{2}) = 6.\cos (3\left(\dfrac{\pi}{2}\right) - \dfrac{2}{3}\pi)$

$f\,'(\dfrac{\pi}{2}) = 6.\cos (\dfrac{9}{6}\pi - \dfrac{4}{6}\pi)$

$f\,'(\dfrac{\pi}{2}) = 6.\cos \dfrac{5}{6}\pi$

$f\,'(\dfrac{\pi}{2}) = 6.\left(-\dfrac{1}{2}\sqrt{3}\right)$

$f\,'(\dfrac{\pi}{2}) = -3\sqrt{3}$

(b) $f(x) = 8.\cos^3 x$ untuk $x = \dfrac{\pi}{3}$

$f(x) = 8\left(\cos x\right)^3$

Maka : $f\,'(x) = 24.\left(\cos x\right)^2(-\sin x)$

$f\,'(x) = -24.\sin x.\cos^2 x$

$f\,'(\dfrac{\pi}{3}) = -24.\sin\left(\dfrac{\pi}{3}\right).\cos^2\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$

$f\,'(\dfrac{\pi}{3}) = -24.\left(\dfrac{1}{2}\sqrt{3}\right).\left(\dfrac{1}{2}\right)^2$

$f\,'(\dfrac{\pi}{3}) = -3\sqrt{3}$