

TRANSFORMASI

C. Transformasi Pada Garis dan Kurva

Pada materi sebelumnya telah dijelaskan tentang transformasi pada titik. Selanjutnya akan diuraikan juga aturan transformasi pada garis dan kurva. Adapun langkah langkah menyelesaikan transformasi pada garis dan kurva adalah

1. Merumuskan pola transformasi yang menghubungkan titik asal dengan titik bayangan
2. Mensubstitusikan pola transformasi itu ke persamaan garis atau kurva
3. Menyelesaikan persamaan bayangannya

Untuk pemahaman lebih lanjut, ikutilah contoh soal berikut ini

01. Tentukanlah bayangan garis $4x - 5y = 3$ jika digeser sejauh $T = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}$

Jawab

Menurut aturan translasi diperoleh : $x' = x + 2$ maka $x = x' - 2$
 $y' = y - 3$ maka $y = y' + 3$

$$\begin{aligned} \text{sehingga } 4x - 5y &= 3 \\ 4(x' - 2) - 5(y' + 3) &= 3 \\ 4x' - 8 - 5y' - 15 &= 3 \\ 4x' - 5y' - 23 &= 3 \\ 4x' - 5y' &= 26 \end{aligned}$$

Jadi persamaan bayangannya : $4x' - 5y' = 26$

02. Tentukanlah bayangan garis $y = 3x - 7$ jika dicerminkan terhadap garis $y = -4$

Jawab

Menurut aturan pencerminan diperoleh : $x' = x$ maka $x = x'$
 $y' = 2(-4) - y$
 $y' = -8 - y$ maka $y = -8 - y'$

$$\begin{aligned} \text{sehingga } y &= 3x - 7 \\ (-8 - y') &= 3x' - 7 \\ -y' &= 3x' - 7 + 8 \\ -y' &= 3x' + 1 \\ y' &= -3x' - 1 \end{aligned} \quad \text{Jadi persamaan bayangannya : } y = -3x - 1$$

03. Jika sebuah parabola dilatasi dengan pusat $A(1, 2)$ dan skala 2 akan menghasilkan bayangan $y = x^2 - 2x + 7$. Tentukanlah persamaan parabola semula

Jawab

Menurut aturan dilatasi diperoleh : $x' = 2(x - 1) + 1$

$$x' = 2x - 2 + 1$$

$$x' = 2x - 1$$

$$y' = 2(y - 2) + 2$$

$$y' = 2y - 4 + 2$$

$$y' = 2y - 2$$

sehingga $y = x^2 - 2x + 7$

$$2y' - 2 = (2x' - 1)^2 - 2(2x' - 1) + 7$$

$$2y' - 2 = 4x'^2 - 4x' + 1 - 4x' + 2 + 7$$

$$2y' - 2 = 4x'^2 - 8x' + 10$$

$$2y' = 4x'^2 - 8x' + 12$$

$$y' = 2x'^2 - 4x' + 6$$

Jadi persamaan bayangannya : $y = 2x^2 - 4x + 6$

04. Tentukanlah bayangan lingkaran $x^2 + y^2 - 6x + 4y + 4 = 0$ jika dilatasi dengan pusat $O(0, 0)$ dan skala 2. Tentukanlah pula pusat dan jari-jari lingkaran bayangan
Jawab

Menurut aturan dilatasi diperoleh : $x' = 2x$ maka $x = \frac{1}{2}x'$

$$y' = 2y \quad \text{maka} \quad y = \frac{1}{2}y'$$

sehingga $x^2 + y^2 - 6x + 4y + 4 = 0$

$$\left[\frac{x'}{2}\right]^2 + \left[\frac{y'}{2}\right]^2 - 6\left[\frac{x'}{2}\right] + 4\left[\frac{y'}{2}\right] + 4 = 0$$

$$\frac{x'^2}{4} + \frac{y'^2}{4} - 3x' + 2y' + 4 = 0$$

$$x'^2 + y'^2 - 12x' + 8y' + 16 = 0$$

Jadi persamaan bayangannya : $x^2 + y^2 - 12x + 8y + 16 = 0$

Pusat $P(x_p, y_p)$ dimana $x_p = -\frac{1}{2}A = -\frac{1}{2}(-12) = 6$

$$y_p = -\frac{1}{2}B = -\frac{1}{2}(8) = -4 \quad \text{Jadi} \quad P(6, -4)$$

Bandingkan dengan pusat lingkaran asal $x^2 + y^2 - 6x + 4y + 4 = 0$, yakni

$P(-\frac{1}{2}(-6) - \frac{1}{2}(4))$ atau $P(3, -2)$

$$\text{Jari-jari : } r = \sqrt{\frac{A^2}{4} + \frac{B^2}{4} - C}$$

$$r = \sqrt{\frac{(-12)^2}{4} + \frac{8^2}{4} - 16}$$

$$r = \sqrt{\frac{144}{4} + \frac{64}{4} - 16}$$

$$r = \sqrt{36 + 16 - 16}$$

$$r = 6$$

Bandingkan dengan pusat lingkaran asal $x^2 + y^2 - 6x + 4y + 4 = 0$, yakni

$$\text{Jari-jari : } r = \sqrt{\frac{(-6)^2}{4} + \frac{4^2}{4} - 4}$$

$$r = \sqrt{\frac{36}{4} + \frac{16}{4} - 4}$$

$$r = \sqrt{9 + 4 - 4}$$

$$r = 3$$

05. Tentukanlah bayangan fungsi $y = x^2 - 5x + 4$ jika dirotasikan sejauh 270° dengan pusat $O(0, 0)$ dilanjutkan pencerminan terhadap garis $y = -x$

Jawab

$$\text{Menurut aturan dilatasi diperoleh : } \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos 270^\circ & -\sin 270^\circ \\ \sin 270^\circ & \cos 270^\circ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ -y \end{bmatrix}$$

$$\text{Jadi } x' = x \quad \text{atau} \quad x = x' \\ y' = -y \quad \text{atau} \quad y = -x'$$

$$\text{sehingga } y = x^2 - 5x + 4$$

$$-y' = x'^2 - 5x' + 4$$

$$y' = -x'^2 + 5x' - 4$$

06. Tentukanlah bayangan garis $2x - y = 5$ oleh transformasi matriks $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 3 \end{bmatrix}$

Jawab

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{(2)(3) - (1)(7)} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -7 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$(-1) \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -7 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 7 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -3x' + y' \\ 7x' - 2y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Maka $x = -3x' + y'$

$$y = 7x' - 2y'$$

sehingga : $2x - y = 5$

$$2(-3x' + y') - (7x' - 2y') = 5$$

$$-6x' + 2y' - 7x' + 2y' = 5$$

$$-13x' + 4y' = 5$$

$$13x' - 4y' = -5 \quad \text{Jadi bayangannya } 13x - 4y = -5$$