

# VEKTOR

## B. Tinjauan Vektor Secara Analitis

### (1) Pengertian

Vektor satuan adalah sebuah vektor yang panjangnya satu satuan.

Vektor basis adalah vektor satuan yang arahnya searah dengan sumbu-sumbu koordinat.

Terdapat tiga macam vektor basis, yaitu:

$\bar{i}$  yaitu vektor basis yang searah dengan arah sumbu X positif

$\bar{j}$  yaitu vektor basis yang searah dengan arah sumbu Y positif

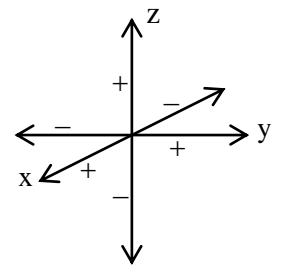
$\bar{k}$  yaitu vektor basis yang searah dengan arah sumbu Z positif

Menyatakan vektor  $\bar{a}$  secara analitis yaitu

menyatakannya

dalam bentuk persamaan dengan komponen  $\bar{i}$ ,  $\bar{j}$  dan  $\bar{k}$  dan dinyatakan

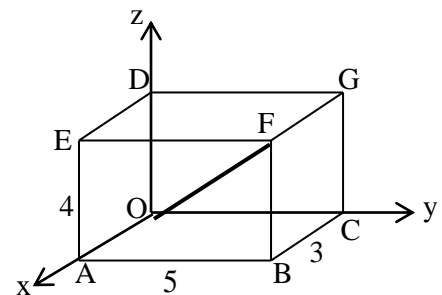
sebagai  $\bar{a} = a_1\bar{i} + a_2\bar{j} + a_3\bar{k}$  atau  $\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$



Sebagai pelengkap pemahaman materi, berikut ini diberikan beberapa contoh soal sebagai berikut :

01. Gambarlah vector  $\bar{a} = 3\bar{i} + 5\bar{j} + 4\bar{k}$

Jawab



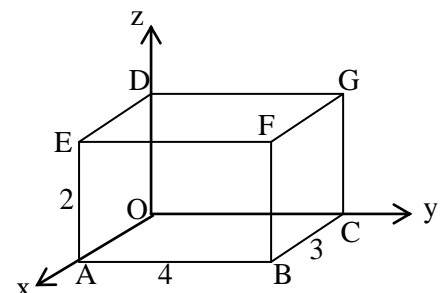
02. Pada gambar balok disamping, nyatakanlah vektor-vektor berikut ini dalam bentuk persamaan vektor

(a)  $\overline{EG}$

(b)  $\overline{DC}$

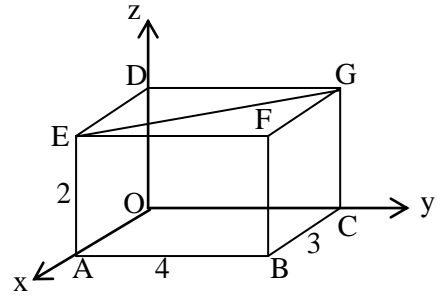
(c)  $\overline{CE}$

(d)  $\overline{DB}$

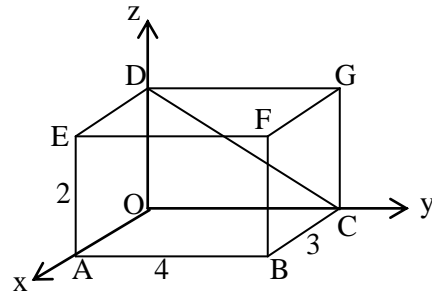


Jawab

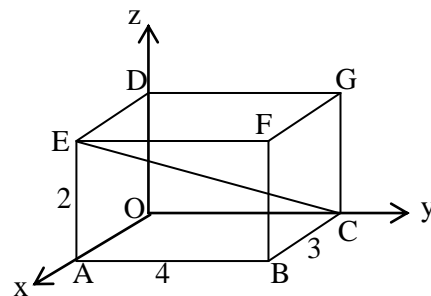
$$\begin{aligned}
 \text{(a) } \overline{EG} &= \overline{ED} + \overline{DG} \\
 &= -3\bar{i} + 4\bar{j} + 0\bar{k} \\
 &= -3\bar{i} + 4\bar{j} \\
 &= \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$



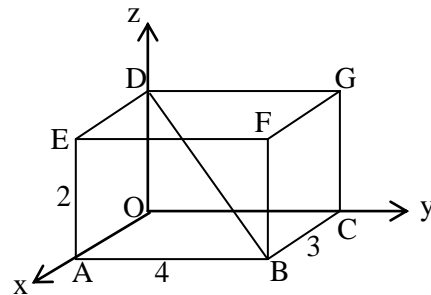
$$\begin{aligned}
 \text{(b) } \overline{DC} &= \overline{DG} + \overline{GC} \\
 &= 0\bar{i} + 4\bar{j} - 2\bar{k} \\
 &= 4\bar{j} - 2\bar{k} \\
 &= \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 \text{(c) } \overline{CE} &= \overline{CB} + \overline{BA} + \overline{AE} \\
 &= 3\bar{i} - 4\bar{j} + 2\bar{k} \\
 &= \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ 2 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 \text{(d) } \overline{DB} &= \overline{DE} + \overline{EF} + \overline{FB} \\
 &= 3\bar{i} + 4\bar{j} - 2\bar{k} \\
 &= \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$



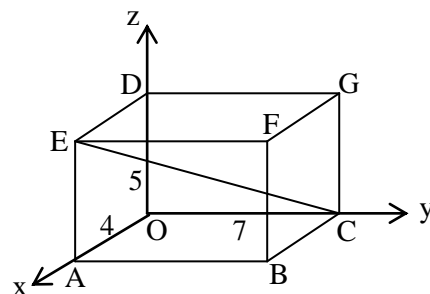
03. Diketahui balok OABC.DEFG dimana O adalah pusat koordinat Cartesius. Jika panjang sisi OA = 4 cm, OC = 7 cm dan OD = 5 cm. Tentukanlah :

(a) Persamaan vektor  $\overline{EC}$

(b) Panjang vektor  $\overline{EC}$

Jawab

$$\begin{aligned}
 \text{(a) } \overline{EC} &= \overline{ED} + \overline{DG} + \overline{GC} \\
 &= -4\bar{i} + 7\bar{j} - 5\bar{k}
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 \text{(b) } EC^2 &= EG^2 + GC^2 \\
 &= (ED^2 + DG^2) + GC^2 \\
 &= (-4)^2 + (7)^2 + (5)^2 \\
 &= 16 + 49 + 25
 \end{aligned}$$

$$EC^2 = 90$$

$$\text{Jadi } EC = \sqrt{90} = 3\sqrt{10} \text{ cm}$$

Catatan

Dari contoh soal diatas dapat disimpulkan bahwa jika vektor  $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$

maka panjang vektor  $\vec{a}$  dapat dirumuskan :  $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$ .

$$\text{Jika } \left. \begin{array}{l} A(a_1, a_2, a_3) \\ B(b_1, b_2, b_3) \end{array} \right\} \text{ maka } \vec{AB} = (b_1 - a_1)\vec{i} + (b_2 - a_2)\vec{j} + (b_3 - a_3)\vec{k} = \begin{bmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \\ b_3 - a_3 \end{bmatrix}$$

Sebagai contoh, akan diuraikan berikut ini:

04. Diketahui titik A(2, -4, 1) dan B(5, -3, -2). Tentukanlah persamaan vector  $\vec{AB}$

Jawab

$$\vec{AB} = \begin{bmatrix} 5-2 \\ -3-(-4) \\ -2-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix} = 3\vec{i} + \vec{j} - 3\vec{k}$$

## (2). Operasi Penjumlahan dan Pengurangan Pada Vektor

Operasi penjumlahan pada atau pengurangan pada vector secara analitis dilakukan dengan cara menjumlahkan atau mengurangi komponen-komponennya, sehingga :

$$(a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}) + (b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}) = [a_1 + b_1]\vec{i} + [a_2 + b_2]\vec{j} + [a_3 + b_3]\vec{k} = \begin{bmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{bmatrix}$$

$$(a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}) - (b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}) = [a_1 - b_1]\vec{i} + [a_2 - b_2]\vec{j} + [a_3 - b_3]\vec{k} = \begin{bmatrix} a_1 - b_1 \\ a_2 - b_2 \\ a_3 - b_3 \end{bmatrix}$$

Untuk lebih jelasnya ikutilah contoh soal berikut ini:

05. Jika  $\vec{a} = 3\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$ ,  $\vec{b} = -4\vec{i} + 2\vec{j} + 5\vec{k}$  dan  $\vec{c} = \vec{i} + 4\vec{j} - 6\vec{k}$ , tentukanlah hasil dari :

$$\text{(a) } 2\vec{a} - \vec{b} + 3\vec{c}$$

$$\text{(b) } \vec{a} + 2\vec{b} - 2\vec{c}$$

Jawab

$$\begin{aligned}
\text{(a) } 2\bar{a} - \bar{b} + 3\bar{c} &= 2 \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ -6 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 6 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 12 \\ -18 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 6 - (-4) + 3 \\ -2 - 2 + 12 \\ 4 - 5 + (-18) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 13 \\ 8 \\ -19 \end{bmatrix} \\
&= 13\bar{i} + 8\bar{j} - 19\bar{k}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{(b) } \bar{a} + 2\bar{b} - 2\bar{c} &= \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ -6 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -8 \\ 4 \\ 10 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ 8 \\ -12 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 3 + (-8) - 2 \\ -1 + 4 - 8 \\ 2 + 10 - (-12) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -7 \\ -5 \\ 24 \end{bmatrix} \\
&= -7\bar{i} - 5\bar{j} + 24\bar{k}
\end{aligned}$$

06. Diketahui  $\bar{a} = 2\bar{i} + 3\bar{j} + \bar{k}$ ,  $\bar{b} = 3\bar{i} - 2\bar{j} + \bar{k}$  dan  $\bar{c} = \bar{i} + 3\bar{j} - 2\bar{k}$ . Tentukanlah persamaan vector  $\bar{x}$  jika  $\bar{a} + 2\bar{x} - 3\bar{c} = \bar{b}$

Jawab

$$\begin{aligned}
\bar{a} + 2\bar{x} - 3\bar{c} &= \bar{b} \\
\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} + 2\bar{x} - \begin{bmatrix} 3 \\ 9 \\ -6 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$2\bar{x} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 9 \\ -6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$2\bar{x} = \begin{bmatrix} 3+3-2 \\ -2+9-3 \\ 1+(-6)-1 \end{bmatrix}$$

$$2\bar{x} = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ -6 \end{bmatrix}$$

$$\bar{x} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ -6 \end{bmatrix}$$

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$\bar{x} = 2\bar{i} + 2\bar{j} - 3\bar{k}$$

07. Diketahui titik P(3, 0, 2), Q(-2, 1, -1) dan R(2, -3, 2) maka tentukanlah vector hasil dari  $3\overline{PR} - 2\overline{QR}$

Jawab

$$3\overline{PR} - 2\overline{QR} = 3 \begin{bmatrix} 2-3 \\ -3-0 \\ 2-2 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 2-(-2) \\ -3-1 \\ 2-(-1) \end{bmatrix}$$

$$= 3 \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 4 \\ -4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -3 \\ -9 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 8 \\ -8 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -11 \\ -1 \\ -6 \end{bmatrix}$$

08. Diketahui titik A(4, -3, -2) dan B(2, 1, -3). Jika  $\overline{AB} + \overline{BC} = -9\bar{i} + 4\bar{j} + 6\bar{k}$ , maka tentukanlah koordinat titik C

Jawab

Misalkan koordinat C(x, y, z), maka

$$\overline{AB} = \begin{bmatrix} 2-4 \\ 1-(-3) \\ -3-(-2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\overline{BC} = \begin{bmatrix} x-2 \\ y-1 \\ z-(-3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x-2 \\ y-1 \\ z+3 \end{bmatrix}$$

$$\text{Sehingga } \overline{AB} + \overline{BC} = \begin{bmatrix} -9 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x-2 \\ y-1 \\ z+3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x-2 \\ y-1 \\ z+3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x-2 \\ y-1 \\ z+3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 \\ 0 \\ 7 \end{bmatrix}$$

Jadi  $x-2 = -7$  maka  $x = -5$

$y-1 = 0$  maka  $y = 1$

$z+3 = 7$  maka  $z = 4$