P O L I N O M I A L

D. Teorema Sisa

Disamping menggunakan metoda bersusun dan skema Horner, sisa pembagian polinom dapat juga dicari dengan ***teorema sisa***. Secara umum teorema sisa diambil dari teorema umum pembagian, yakni :

Yang dibagi = pembagi x hasil bagi + sisa

Namun secara khusus teorema sisa dibagi atas beberapa bagian sesuai dengan karasteristik pembaginya, yaitu :

1. Jika polinom f(x) dibagi oleh (x – k) akan mendapatkan hasil bagi H(x) dan sisa s , maka berlaku hubungan:
   f(x) = (x – k) H(x) + s
   Untuk k = 0 maka f(k) = (k – k)H(k) + s
   sehingga sisa = s = f(k)
2. Jika polinom f(x) dibagi oleh $ax^2 + bx + c = a(x – x_1)(x – x_2)$ akan mendapatkan hasil bagi H(x) dan sisa S(x) maka berlaku hubungan :
   $f(x) = (x – x_1)(x – x_2) H(x) + S(x)$
   Misalkan S(x) = mx + n, maka
   $f(x_1) = (x_1 – x_1)(x_1 – x_2) H(x_1) + mx_1 + n$ sehingga $f(x_1) = mx_1 + n$ …… (1)
   $f(x_2) = (x_2 – x_1)(x_2 – x_2) H(x_2) + mx_2 + n$ sehingga $f(x_2) = mx_2 + n$ …… (2)
   Jika (1) dan (2) dieliminasi, akan diperoleh nilai m dan n, sehingga S(x) dapat dicari

Kalau proses ini diteruskan, maka akan diperoleh pula sisa pembagian untuk pembagi $ax^3 + bx^2 + cx + d = a(x – x_1)(x – x_2)(x – x_3)$. Tentu saja proses ini menggunakan eliminasi tiga variable dengan tiga persamaan. Namun dalam bab ini akan dibahas hanya sampai pembagi berderajat 2

Untuk lebih jelasnya akan diuraikan pada contoh berikut ini

01. Tentukanlah sisa dari pembagian polinom $(x^3 – 5x^2 + 4x + 8) : (x – 3)$ dengan menggunakan teorema sisa
    Jawab
    Misalkan $F(x) = x^3 – 5x^2 + 4x + 8$ maka pembagian F(x) dengan (x – 3) mendapatkan sisa F(3)
    Jadi : Sisa $= (3)^3 – 5(3)^2 + 4(3) + 8$
    $= 27 – 45 + 12 + 8$
    $= 2$

02. Tentukanlah sisa dari pembagian polinom $(x^3 + 2x^2 – 2x + 6) : (x^2 – 2x – 3)$ dengan menggunakan teorema sisa

Jawab

Misalkan $F(x) = x^3 + 2x^2 – 2x + 6$, maka pembagian F(x) dengan $x^2 – 2x – 3 = (x – 3)(x + 1)$ mendapatkan sisa $S(x) = mx + n$

Sehingga : $F(3) = m(3) + n$

$(3)^3 + 2(3)^2 – 2(3) + 6 = 3m + n$

$27 + 18 – 6 + 6 = 3m + n$

$45 = 3m + n$ …… (1)

$F(–1) = m(–1) + n$

$(–1)^3 + 2(–1)^2 – 2(–1) + 6 = –m + n$

$–1 + 2 + 2 + 6 = –m + n$

$9 = –m + n$ …….…….. (2)

Dari (1) dan (2) diperoleh :

$$\begin{array}{rl} 45 = & 3m + n \\ 9 = & –m + n \\ \hline 36 = & 4m \end{array} \quad –$$

Maka $m = 9$ dan $n = 18$

Jadi : $S(x) = 9m + 18$

03. Tentukanlah sisa dari pembagian polinom $(x^3 – 2x^2 – 6x + 8) : (x^2 – 9)$ dengan menggunakan teorema sisa

Jawab

Misalkan $F(x) = x^3 – 2x^2 – 6x + 8$, maka hasil pembagian F(x) dengan $x^2 – 9 = (x – 3)(x + 3)$ mendapatkan sisa $S(x) = mx + n$

Sehingga : $F(3) = m(3) + n$

$(3)^3 – 2(3)^2 – 6(3) + 8 = 3m + n$

$27 – 18 – 18 + 8 = 3m + n$

$–1 = 3m + n$ …… (1)

$F(–3) = m(–3) + n$

$(–3)^3 – 2(–3)^2 – 6(–3) + 8 = –3m + n$

$–27 – 18 + 18 + 8 = –3m + n$

$–19 = –3m + n$ …….. (2)

Dari (1) dan (2) diperoleh :

$$\begin{array}{rl} –1 = & 3m + n \\ –19 = & –3m + n \\ \hline 18 = & 6m \end{array} \quad –$$

Maka $m = 3$ dan $n = –10$

Jadi : $S(x) = 3m – 10$

04. Jika polinom F(x) dibagi (x – 4) maka sisanya 12. Dan jika F(x) dibagi dengan (x + 3) maka sisanya –2. Tentukan sisanya jika polinom F(x) dibagi dengan $(x^2 – x – 12)$

Jawab

Polinom F(x) dibagi (x – 4) sisanya F(4) = 12

Polinom F(x) dibagi (x + 3) sisanya F(–3) = –2

Polinom F(x) dibagi $x^2 – x – 12$ = (x + 3)(x – 4) sisanya mx + n

Sehingga F(–3) = m(–3) + n maka –2 = –3m + n ..... (1)

F(4) = m(4) + n maka 12 = 4m + n ..... (2)

Dari (1) dan (2) diperoleh : –2 = –3m + n

12 = 4m + n

–

–14 = –7m

Maka m = 2 dan n = 4

Jadi : S(x) = 2x + 4

05. Jika polinom F(x) dibagi (x + 5) maka sisanya 15. Dan jika F(x) dibagi $(x^2 – 5x + 6)$ maka sisanya adalah 2x – 17. Tentukanlah sisanya jika polinom F(x) dibagi dengan $(x^2 + 3x – 10)$

Jawab

Polinom F(x) dibagi (x + 5) sisanya F(–5) = 15

Polinom F(x) dibagi $x^2 – 5x + 6$ = (x – 3)(x – 2) sisanya 2x – 17

Maka F(3) = 2(3) – 17 diperoleh F(3) = –11

F(2) = 2(2) – 17 diperoleh F(2) = –13

Polinom F(x) dibagi $x^2 + 3x – 10$ = (x + 5)(x – 2) sisanya mx + n

Sehingga F(–5) = m(–5) + n maka 15 = –5m + n ..... (1)

F(2) = m(2) + n maka –13 = 2m + n ..... (2)

Dari (1) dan (2) diperoleh : 15 = –5m + n

–13 = 2m + n

–

28 = –7m

Maka m = –4 dan n = –5

Jadi : S(x) = –4x – 5

06. Polinom $x^4 – 8x^2 + 2ax + b$ dibagi $x^2 – x – 2$ mendapatkan sisa 3x – 4. Tentukan nilai a dan b

Jawab

Misalkan $F(x) = x^4 – 8x^2 + 2ax + b$

Maka F(x) dibagi $x^2 – x – 2$ = (x – 2)(x + 1) sisanya 3x – 4

Sehingga F(2) = 3(2) – 4 diperoleh F(2) = 2

F(–1) = 3(–1) – 4 diperoleh F(–1) = –7

Jadi $F(2) = (2)^4 – 8(2)^2 + 2a(2) + b = 2$

16 – 32 + 4a + b = 2

–16 + 4a + b = 2

4a + b = 18 ..... (1)

$F(–1) = (–1)^4 – 8(–1)^2 + 2a(–1) + b = –7$

1 – 8 –2a + b = –7

$-7 - 2a + b = -7$

$-2a + b = 0$ ..... (2)

Dari (1) dan (2) diperoleh :

$$\begin{array}{rl} 4a + b = 18 & \\ -2a + b = 0 & - \\ \hline 6a = 18 & \end{array}$$

Maka $a = 3$ dan $b = 6$