

POLINOMIAL

E. Teorema Faktor

Secara umum teorema faktor berbunyi: “Jika $G(x)$ adalah faktor dari polinom $F(x)$, maka $F(x)$ dibagi $G(x)$ mendapatkan sisa nol,

Secara khusus jika $(x - k)$ adalah faktor linier dari polinom $F(x)$ maka $F(k) = 0$. dan $x = k$ adalah salah satu akar persamaan $F(x) = 0$

Untuk lebih jelasnya akan diuraikan pada contoh berikut ini

01. Buktikanlah bahwa $(x + 3)$ adalah faktor dari $x^3 + x^2 - 9x - 9$

Jawab

Jika $(x + 3)$ adalah factor dari $F(x) = x^3 + x^2 - 9x - 9$, maka $F(-3) = 0$

Uji : $F(-3) = (-3)^3 + (-3)^2 - 9(-3) - 9$

$$F(-3) = -27 + 9 + 27 - 9$$

$$F(-3) = 0$$

Terbukti bahwa $(x + 3)$ adalah faktor dari $x^3 + x^2 - 9x - 9$

02. Tentukanlah faktor-faktor linier dari persamaan $x^4 - 4x^3 - x^2 + 16x - 12 = 0$

Jawab

Dengan menggunakan skema Horner diperoleh :

2	1	-4	-1	16	-12	
		2	-4	-10	12	+
-2	1	-2	-5	-6	0	
		-2	8	6		+
1	1	-4	3	0		
		1	-3			+
3	1	-3	0			
		3				+
	1	0				

Faktor-faktornya : $(x - 2)$, $(x + 2)$, $(x - 1)$ dan $(x - 3)$

03. Tentukanlah faktor-faktor linier dari persamaan $x^4 - x^3 - x^2 + 4x - 12 = 0$

Jawab

$$\begin{array}{r|rrrrr}
 2 & 1 & -1 & -1 & 4 & -12 \\
 & & 2 & 2 & 2 & 12 \\
 \hline
 -2 & 1 & 1 & 1 & 6 & 0 \\
 & & -2 & 2 & -6 & \\
 \hline
 & 1 & -1 & 3 & 0 &
 \end{array}$$

Karena hasil bagi Horner terakhir, yakni $x^2 - x + 3$ tidak dapat difaktorkan lagi, maka faktor-faktor linier dari persamaan $x^4 - x^3 - x^2 + 4x - 12 = 0$ adalah $(x - 2)$ dan $(x + 2)$

04. Tentukanlah faktor-faktor linier dari persamaan $2x^3 - x^2 - 18x + 9 = 0$

Jawab

$$\begin{array}{r|rrrr}
 3 & 2 & -1 & -18 & 9 \\
 & & 6 & 15 & -9 \\
 \hline
 -3 & 2 & 5 & -3 & 0 \\
 & & -6 & 3 & \\
 \hline
 1/2 & 2 & -1 & 0 & \\
 & & 1 & & \\
 \hline
 & 2 & 0 & &
 \end{array}$$

Faktor-faktor liniernya : $(x - 2)$, $(x + 3)$ dan $(2x - 1)$

Jika x_1, x_2, x_3, \dots dan x_n adalah nilai-nilai x yang memenuhi persamaan polinom $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$ maka x_1, x_2, x_3, \dots dan x_n dinamakan akar-akar polinom tersebut. Adapun rumus jumlah dan hasil kali akar-akar persamaan suatu polinom dapat diturunkan sebagai berikut :

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$$

$$(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4) \dots (x - x_n) = 0$$

$$a_n x^n + (x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n) x^{n-1} + \dots + (x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \dots \cdot x_n) = 0$$

Sehingga diperoleh hubungan :

$$x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n}$$

$$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \dots \cdot x_n = \pm \frac{a_0}{a_n} \left. \begin{array}{l} (+ \text{ jika } n \text{ genap}) \\ (- \text{ jika } n \text{ ganjil}) \end{array} \right\}$$

Sebagai ilustrasi :

$$(1) \quad ax^2 + bx + c = 0$$

$$\text{maka } x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

$$(2) \quad ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

$$\text{maka } x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a}$$

$$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = -\frac{d}{a}$$

$$(3) \quad ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$$

$$\text{maka } x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -\frac{b}{a}$$

$$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 = \frac{e}{a}$$

$$(4) \quad ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f = 0$$

$$\text{maka } x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = -\frac{b}{a}$$

$$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 \cdot x_5 = -\frac{f}{a}$$

Untuk lebih jelasnya akan diuraikan pada contoh soal berikut ini :

05. Tentukanlah jumlah dan hasil kali akar-akar persamaan polinom berikut ini

$$(a) \quad 2x^3 - 5x^2 + 4x - 6 = 0$$

$$(b) \quad (2x^2 - 3x)^2 + (6x^3 + 2x^2 - 5) = 0$$

Jawab

$$(a) \quad 2x^3 - 5x^2 + 4x - 6 = 0$$

maka

$$x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a}$$

$$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = -\frac{d}{a}$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{(-5)}{2}$$

$$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = -\frac{(-6)}{2}$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = \frac{5}{2}$$

$$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = 3$$

$$(b) \quad (2x^2 - 3x)^2 + (6x^3 + 2x^2 - 5) = 0$$

$$(2x^2)^2 - 2(2x^2)(3x) + (3x)^2 + 6x^3 + 2x^2 - 5 = 0$$

$$4x^4 - 12x^3 + 9x^2 + 6x^3 + 2x^2 - 5 = 0$$

$$4x^4 - 6x^3 + 11x^2 - 5 = 0$$

maka

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -\frac{b}{a}$$

$$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 = \frac{e}{a}$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{(-5)}{4}$$

$$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = \frac{(-5)}{4}$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = \frac{5}{4}$$

$$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = -\frac{5}{4}$$

06. Diketahui persamaan polinom berderajat empat $ax^4 + 6x^3 - 5x^2 + x + 9 = 0$. Jika $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -2$ maka tentukanlah nilai $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4$!

Jawab

$$ax^4 + 6x^3 - 5x^2 + x + 9 = 0$$

$$\text{maka } x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -2$$

$$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 = \frac{e}{a}$$

$$-\frac{6}{a} = -2$$

$$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = \frac{(-5)}{4}$$

$$a = 3$$

$$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 = \frac{e}{a}$$

$$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 = \frac{9}{3}$$

$$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 = 3$$

07. Salah satu akar dari persamaan $2x^3 + 3x^2 + 7x + 3p = 0$ adalah -1 . Tentukanlah hasil kali dua akar yang lain !

Jawab

$$\text{Misalkan } x_1 = -1, \text{ maka } 2(-1)^3 + 3(-1)^2 + 7(-1) + 3p = 0$$

$$-2 + 3 - 7 + 3p = 0$$

$$3p - 6 = 0$$

$$3p = 6 \text{ sehingga } p = 2$$

$$\text{Jadi } x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = -\frac{3p}{2}$$

$$(-1) \cdot x_2 \cdot x_3 = -\frac{3(2)}{2}$$

$$-x_2 \cdot x_3 = -3$$

$$x_2 \cdot x_3 = 3$$

Hasil kali dua akar yang lain sama dengan 3