

# SISTEM PERTIDAKSAMAAN LINIER DAN KUADRAT

## C. Sistem Pertidaksamaan Linier dan Kuadrat

Sebelum membahas sistem pertidaksamaan, akan dibahas terlebih dahulu secara tersendiri pertidaksamaan linier dan pertidaksamaan kuadrat dua variabel.

Pertidaksamaan linier dua variabel yaitu suatu pertidaksamaan yang memuat dua variabel dengan pangkat tertinggi satu.

Penyelesaian dari pertidaksamaan linier dua variabel ini merupakan gambar daerah pada grafik Catesius (sumbu-XY) yang dibatasi oleh suatu garis linier

Untuk lebih jelasnya ikutilah contoh soal berikut ini :

01. gambarkan daerah penyelesaian pertidaksamaan linier  $y \leq -2x + 6$ , dengan  $x$  dan  $y$  anggota real.

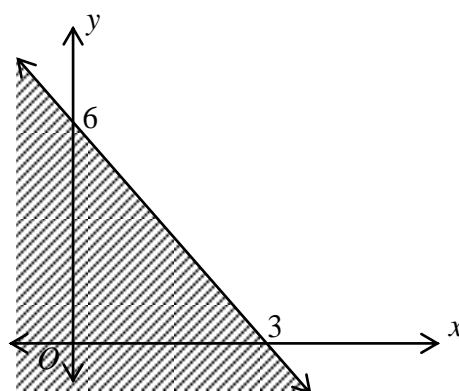
Jawab

Pertama kita gambar garis  $y = -2x + 6$  dengan bantuan tabel.

x	y	(x,y)
0	6	(0,6)
3	0	(3,0)

Selanjutnya diambil satu titik sembarang sebagai titik uji, misalnya  $O(0, 0)$ , sehingga diperoleh  $0 \leq -2(0) + 6$  (pernyataan benar)

Jadi himpunan penyelesaiannya adalah daerah bagian kiri bawah garis  $y = -2x + 6$ .

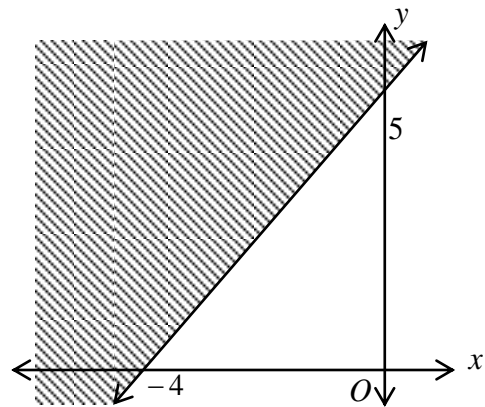


02. Gambarlah daerah penyelesaian dari pertidaksamaan linier  $5x - 4y \leq -20$  dengan  $x$  dan  $y$  anggota real.

Jawab

Pertama akan dilukis garis  $5x - 4y = -20$  ke dalam satu tatanan koordinat Cartesius

x	y	(x, y)
0	5	(0, 5)
-4	0	(-4, 0)



Selanjutnya diambil satu titik sembarang sebagai titik uji, misalnya  $O(0, 0)$ , Sehingga diperoleh  $5(0) - 4(0) = 0 \geq -20$

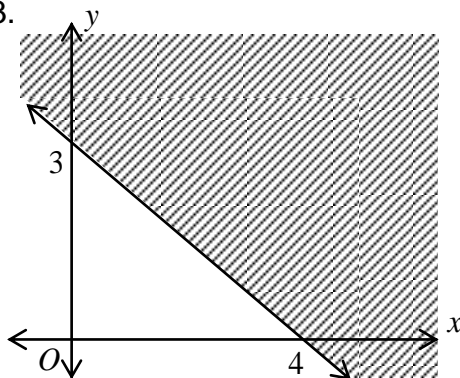
Apabila daerah penyelesaian pertidaksamaan linier diketahui dan garis batasnya melalui dua titik tertentu, maka pertidaksamaan liniernya dapat ditentukan.

Jika kedua titik yang diketahui berada pada sumbu-X dan sumbu-Y, maka persamaan liniernya ditentukan dengan rumus :

$$\left. \begin{array}{l} (0, a) \\ (b, 0) \end{array} \right\} ax + by = a.b$$

Untuk lebih jelasnya akan diuraikan pada contoh soal berikut:

03.



Tentukanlah pertidaksamaan linier untuk daerah yang diarsir pada gambar di samping

Jawab

Persamaan garis yang melalui titik  $(4,0)$  dan  $(0, 3)$  adalah

$$\left. \begin{array}{l} (0, 3) \\ (4, 0) \end{array} \right\} \begin{array}{l} 3x + 4y = (3)(4) \\ 3x + 4y = 12 \end{array}$$

Sehingga pertidaksamaan linier untuk gambar di atas adalah  $3x + 4y \geq 12$

Sedangkan pertidaksamaan kuadrat dua variabel ( $x$  dan  $y$ ) merupakan suatu pertidaksamaan dengan variabel  $x$  memiliki pangkat tertinggi dua secara umum bentuk fungsi kuadrat adalah  $y = ax^2 + bx + c$  dan grafiknya berbentuk parabola. Untuk menggambar grafiknya, diperlukan langkah-langkah tersendiri, yakni :

- (1) Menentukan titik potong dengan sumbu  $x$  , syaratnya  $y = 0$
- (2) Menentukan titik potong dengan sumbu  $y$  , syaratnya  $x = 0$
- (3) Menentukan titik maksimum/minimum fungsi, yaitu  $P\left(\frac{-b}{2a}, \frac{b^2 - 4ac}{-4a}\right)$
- (4) Menggambar grafik fungsi

Untuk lebih jelasnya, ikutilah contoh soal berikut ini :

04. Gambarlah daerah penyelesaian pertidaksamaan kuadrat  $y > x^2 - 8x + 12$

Jawab

- (1) Titik potong dengan sumbu- $X$  syarat  $y = 0$

$$x^2 - 8x + 12 = 0$$

$$(x - 6)(x - 2) = 0$$

$$x = 6 \text{ dan } x = 2 \text{ Titik potongnya } (2, 0) \text{ dan } (6, 0)$$

- (2) Titik potong dengan sumbu- $Y$  syarat  $x = 0$

$$y = x^2 - 8x + 12$$

$$y = (0)^2 - 8(0) + 12$$

$$y = 12 \text{ Titik potongnya } (0, 12)$$

- (3) Menentukan titik minimum fungsi  $y = x^2 - 8x + 12$

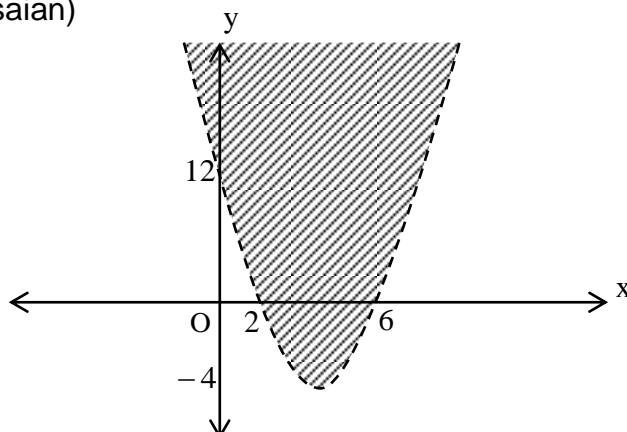
$$P\left(\frac{-b}{2a}, \frac{b^2 - 4ac}{-4a}\right)$$

$$P\left(\frac{-(-8)}{2(1)}, \frac{(-8)^2 - 4(1)(12)}{-4(1)}\right)$$

$$P\left(\frac{8}{2}, \frac{64 - 48}{-4}\right)$$

$$P(4, -4)$$

- (4) Gambar daerah penyelesaiannya (Daerah yang diarsir adalah daerah penyelesaian)



05. Gambarlah daerah penyelesaian pertidaksamaan kuadrat  $y \leq x^2 - 4x - 5$   
 Jawab

(1) Titik potong dengan sumbu-X syarat  $y = 0$

$$x^2 - 4x - 5 = 0$$

$$(x - 5)(x + 1) = 0$$

$x = -1$  dan  $x = 5$ . Titik potongnya  $(-1, 0)$  dan  $(5, 0)$

(2) Titik potong dengan sumbu-Y syarat  $x = 0$

$$y = x^2 - 4x - 5$$

$$y = (0)^2 - 4(0) - 5$$

$y = -5$ . Titik potongnya  $(0, -5)$

(3) Menentukan titik minimum fungsi  $y = x^2 - 4x - 5$

$$P\left(\frac{-b}{2a}, \frac{b^2 - 4ac}{-4a}\right)$$

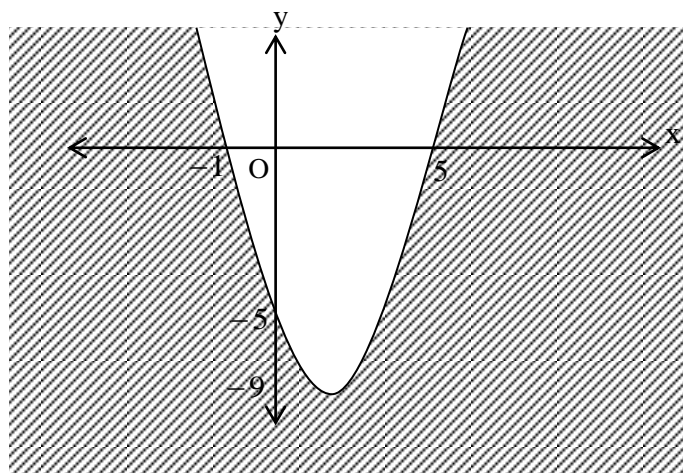
$$P\left(\frac{-(-4)}{2(1)}, \frac{(-4)^2 - 4(1)(-5)}{-4(1)}\right)$$

$$P\left(\frac{4}{2}, \frac{16 + 20}{-4}\right)$$

$P(2, -9)$

(4) Gambar daerah penyelesaiannya

(Daerah yang diarsir adalah daerah penyelesaian)



Terkadang suatu fungsi kuadrat dapat ditentukan jika diketahui beberapa unsurnya, yaitu

- Jika fungsi kuadrat diketahui titik potong dengan sumbu x yaitu  $(x_1, 0)$  dan  $(x_2, 0)$  maka persamaannya adalah  $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$
- Jika suatu fungsi kuadrat diketahui titik baliknya  $P(p, q)$ , maka persamaannya adalah  $f(x) = a(x - p)^2 + q$

Aturan ini dipakai untuk menyusun pertidaksamaan kuadrat jika diketahui gambar daerah penyelesaiannya.

Untuk lebih jelasnya, ikutilah contoh soal berikut ini :

06. Tentukanlah pertidaksamaan kuadrat dari gambar berikut ini

Jawab

$$y = a(x - p)^2 + q$$

$$y = a(x - 3)^2 + (-6)$$

$$y = a(x^2 - 6x + 9) - 6$$

Melalui (0, 12) maka :

$$12 = a(0^2 - 6(0) + 9) - 6$$

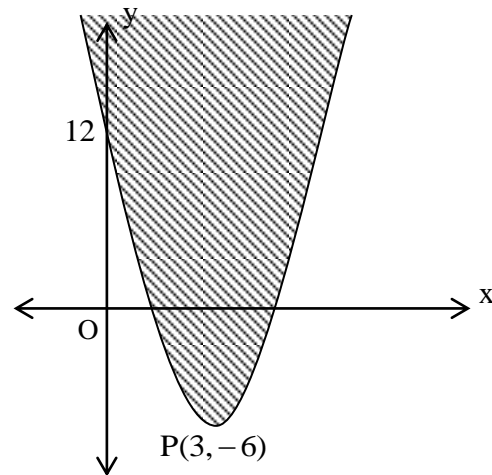
$$12 + 6 = a(9)$$

$$18 = 9a \text{ sehingga } a = 2$$

$$\text{Jadi } y = 2(x^2 - 6x + 9) - 6$$

$$y = 2x^2 - 12x + 12$$

Sehingga pertidaksamaannya adalah :  $y \geq 2x^2 - 12x + 12$



07. Tentukanlah pertidaksamaan kuadrat dari gambar berikut ini

Jawab

$$y = a(x - x_1)(x - x_2)$$

$$y = a(x - 4)(x - (-2))$$

$$y = a(x - 4)(x + 2)$$

$$y = a(x^2 - 2x - 8)$$

Melalui titik (0, -8) maka :

$$-8 = a(0^2 - 2(0) - 8)$$

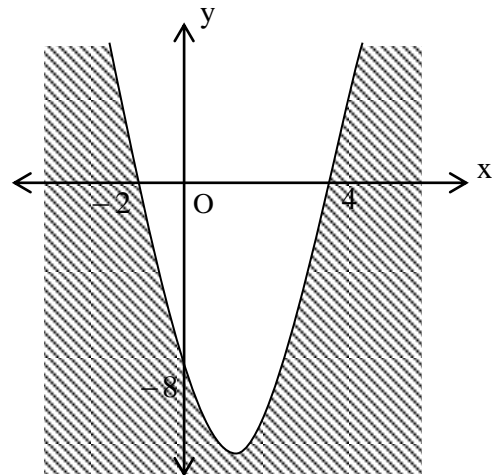
$$-8 = a(0 - 0 - 8)$$

$$-8 = a(-8) \text{ sehingga } a = 1$$

$$\text{Jadi } y = 1(x^2 - 2x - 8)$$

$$y = x^2 - 2x - 8$$

Sehingga pertidaksamaannya adalah :  $y \leq x^2 - 2x - 8$



Pada sistem pertidaksamaan linier dan kuadrat, kedua pertidaksamaan tersebut (linier dan kuadrat) dipadukan dalam satu sistem koordinat Cartesius. Sehingga daerah penyelesaiannya adalah irisan dari daerah penyelesaian pertidaksamaan linier dan pertidaksamaan kuadrat.

Untuk lebih jelasnya ikutilah contoh soal berikut ini :

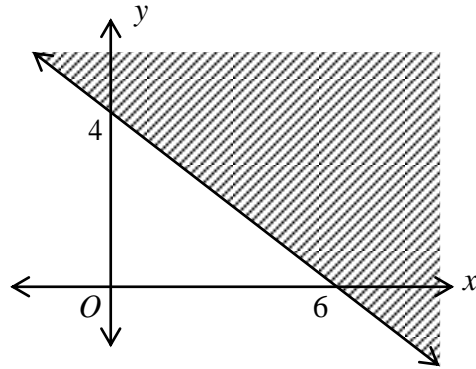
08. Gambarkanlah daerah penyelesaian dari sistem pertidaksamaan  $2x + 3y \geq 12$  dan  $y \leq -x^2 + 2x + 8$  dalam tata koordinat Cartesius,

Jawab

Pertama akan digambar daerah penyelesaian  $2x + 3y \geq 12$

$$2x + 3y = 12$$

x	y	(x, y)
0	4	(0, 4)
6	0	(6, 0)



Selanjutnya digambar juga daerah penyelesaian  $y \leq -x^2 + 2x + 8$ , dengan langkah langkah :

Menentukan titik potong dengan sumbu-X syarat  $y = 0$

$$-x^2 + 2x + 8 = 0$$

$$x^2 - 2x - 8 = 0$$

$$(x - 4)(x + 2) = 0$$

$x = -2$  dan  $x = 4$  . Titik potongnya  $(-2, 0)$  dan  $(4, 0)$

Menentukan titik potong dengan sumbu-Y syarat  $x = 0$

$$y = -x^2 + 2x + 8$$

$$y = -(0)^2 + 2(0) + 8$$

$y = 8$  . Titik potongnya  $(0, 8)$

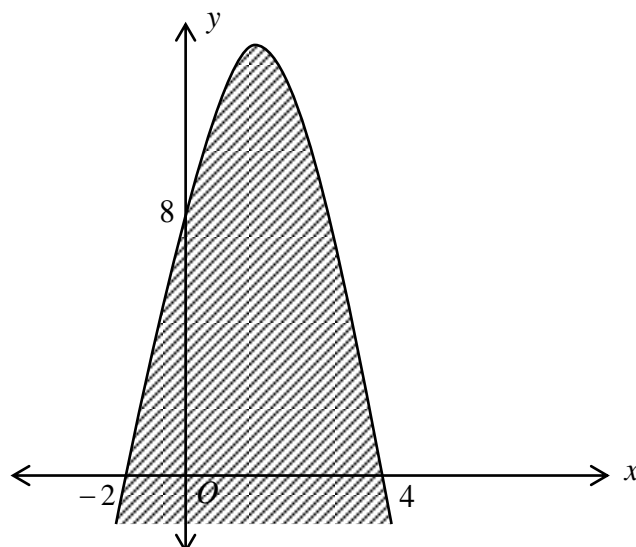
Menentukan titik maksimum fungsi  $y = -x^2 + 2x + 8$

$$P\left(\frac{-b}{2a}, \frac{b^2 - 4ac}{-4a}\right)$$

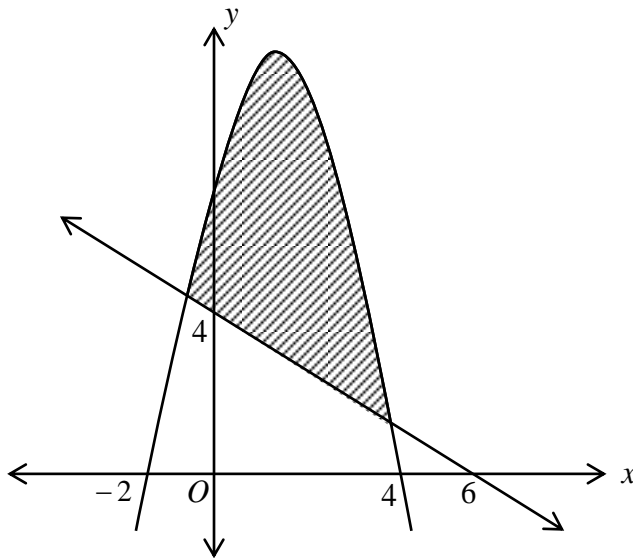
$$P\left(\frac{-2}{2(-1)}, \frac{2^2 - 4(-1)(8)}{-4(-1)}\right)$$

$P(1, 9)$

Menggambar daerah penyelesaiannya (Daerah yang diarsir adalah daerah penyelesaian)



Irisan dari kedua daerah penyelesaian tersebut merupakan penyelesaian dari sistem pertidaksamaan  $2x + 3y \geq 12$  dan  $y \leq -x^2 + 2x + 8$   
 Gambar daerahnya adalah sebagai berikut :

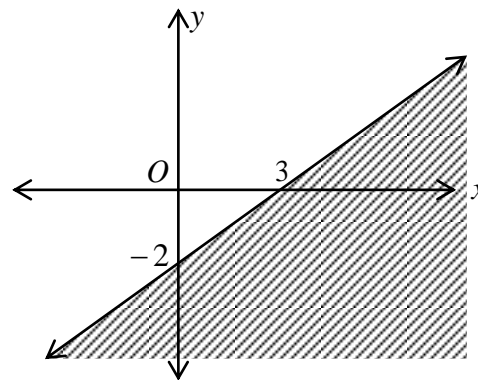


09. Gambarkan daerah penyelesaian dari sistem pertidaksamaan  $2x - 3y \geq 6$  dan  $y \leq x^2 - 2x - 15$  dalam tata koordinat Cartesius,  
 Jawab

Pertama akan digambar daerah penyelesaian  $2x - 3y \geq 6$

$$2x - 3y = 6$$

x	y	(x, y)
0	-2	(0, -2)
3	0	(3, 0)



Selanjutnya digambar juga daerah penyelesaian  $y \leq x^2 - 2x - 15$ , dengan langkah langkah :

Menentukan titik potong dengan sumbu-X syarat  $y = 0$

$$x^2 - 2x - 15 = 0$$

$$(x - 5)(x + 3) = 0$$

$x = -3$  dan  $x = 5$  . Titik potongnya  $(-3, 0)$  dan  $(5, 0)$

Menentukan titik potong dengan sumbu-Y syarat  $x = 0$

$$y = x^2 - 2x - 15$$

$$y = (0)^2 - 2(0) - 15$$

$y = -15$  . Titik potongnya  $(0, -15)$

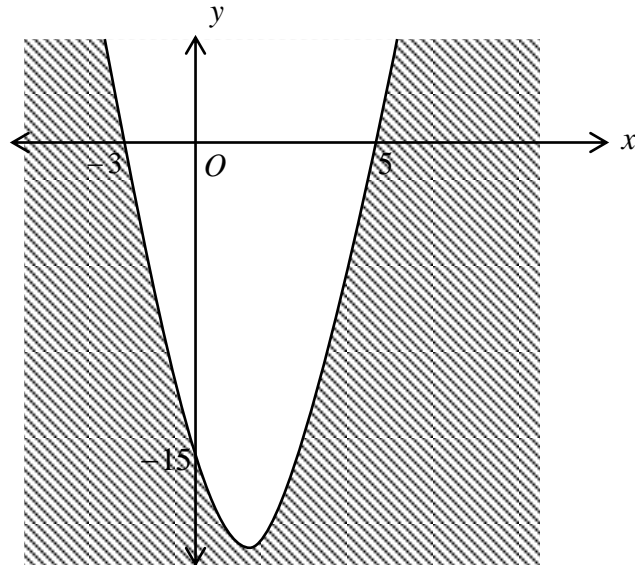
Menentukan titik maksimum fungsi  $y = x^2 - 2x - 15$

$$P\left(\frac{-b}{2a}, \frac{b^2 - 4ac}{-4a}\right)$$

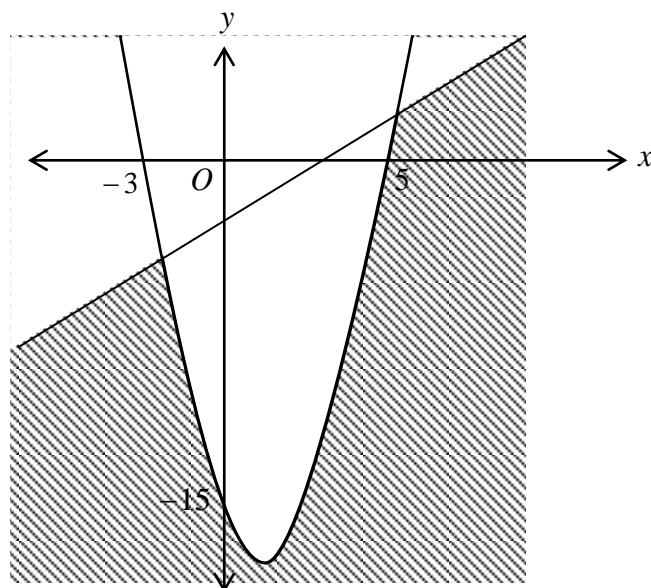
$$P\left(\frac{-(-2)}{2(1)}, \frac{(-2)^2 - 4(1)(-15)}{-4(1)}\right)$$

$$P(1, -16)$$

Menggambar daerah penyelesaiannya (Daerah yang diarsir adalah daerah penyelesaian)

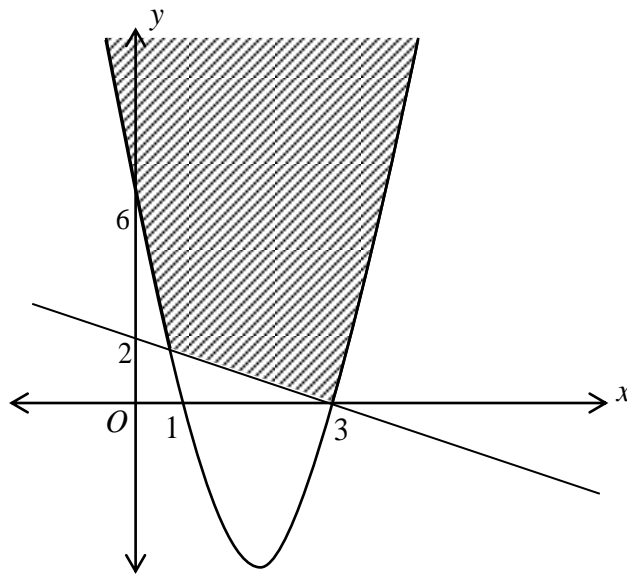


Irisan dari kedua daerah penyelesaian tersebut merupakan penyelesaian dari sistem pertidaksamaan  $2x - 3y \geq 6$  dan  $y \leq x^2 - 2x - 15$   
Gambar daerahnya adalah sebagai berikut :





10. Tentukanlah sistem pertidaksamaan dari daerah penyelesaian pada gambar berikut ini:



Jawab

Persamaan garis yang melalui titik  $(4,0)$  dan  $(0, 3)$  adalah

$$\left. \begin{array}{l} (0, 2) \\ (3, 0) \end{array} \right\} \begin{array}{l} 2x + 3y = (2)(3) \\ 2x + 3y = 6 \end{array} \quad \text{Pertidaksamaannya } 2x + 3y \geq 6$$

Persamaan kuadrat yang melalui titik  $(1, 0)$  dan  $(3, 0)$  serta titik  $(0, 6)$  adalah

$$y = a(x - x_1)(x - x_2)$$

$$y = a(x - 1)(x - 3)$$

$$y = a(x^2 - 4x + 3)$$

Melalui titik  $(0, 6)$  maka :

$$6 = a(0^2 - 4(0) + 3)$$

$$6 = a(0 - 0 + 3)$$

$$6 = a(3) \quad \text{sehingga } a = 2$$

$$\text{Jadi } y = 2(x^2 - 4x + 3)$$

$$y = 2x^2 - 4x + 6 \quad \text{Pertidaksamaannya } y \geq 2x^2 - 4x + 6$$

Sehingga system pertidaksamaannya adalah :  $2x + 3y \geq 6$  dan  $y \geq 2x^2 - 4x + 6$