PERBANDINGAN DAN FUNGSI TRIGONOMETRI

D. Rumus Perbandingan Trigonometri di Semua Kuadran

Dalam pembahasan sebelumnya, kita telah melihat nilai perbandingan trigonometri untuk sudut sudut istimewa yang besarnya kurang dari 90^0 (dinamakan *sudut lancip*). Selanjutnya akan dibahas nilai perbandingan trigonometri untuk sudut sudut istimewa yang besarnya lebih dari 90^0.

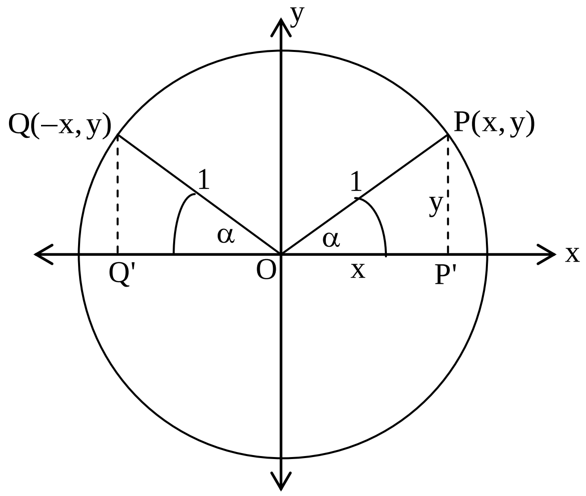
Yang dimaksud sudut istimewa yaitu sudut 0^0 dan sudut kelipatan 30^0 dan 45^0 .
Dalam interval $0^0 \leq x \leq 360^0$ sudut-sudut tersebut dikelompokkan atas empat kuadran, yaitu :

Kuadran I , yakni sudut-sudut yang besarnya antara 0^0 sampai 90^0 (dinamakan sudut *lancip*)
Kuadran II , yakni sudut-sudut yang besarnya antara 90^0 sampai 180^0 (dinamakan sudut *tumpul*)
Kuadran III , yakni sudut-sudut yang besarnya antara 180^0 sampai 270^0
Kuadran IV , yakni sudut-sudut yang besarnya antara 270^0 sampai 360^0

Nilai perbandingan trigonometri untuk sudut-sudut istimewa dapat dikelompokkan menjadi dua bagian, yakni :

- Dengan menggunakan aturan pelurus $(180^0 - \alpha)$, $(180^0 + \alpha)$ dan $(360^0 - \alpha)$
- dengan menggunakan aturan penyiku $(90^0 + \alpha)$, $(270^0 - \alpha)$ dan $(270^0 + \alpha)$.

Untuk nilai perbandingan trigonometri sudut-sudut istimewa dengan menggunakan aturan pelurus dapat dijelaskan sebagai berikut :



Misalkan sebuah lingkaran dengan jari-jari 1 satuan dengan ujung titik P(x, y) diletakkan pada koordinat Cartesius.
Kemudian pada kuadran II terdapat titik Q(–x, y) pada lingkaran tersebut sehingga segitiga siku-siku OP'P dan OQ'Q kongruen.

Dari segitiga OP'P diperoleh nilai : Sinα = $\frac{y}{1}$ = y   cosα = $\frac{x}{1}$ = x   tanα = $\frac{y}{x}$

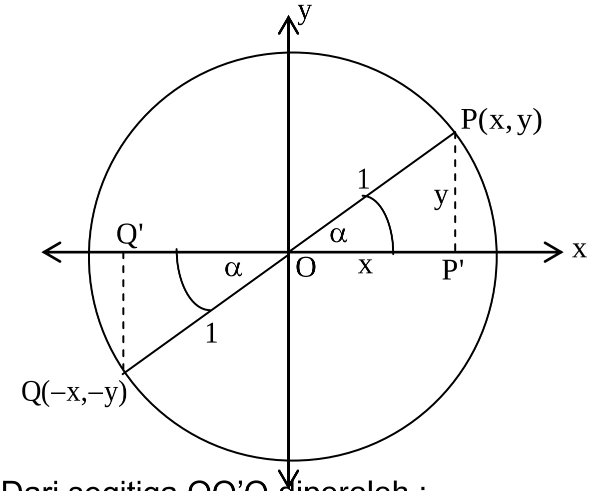
Dari segitiga OQ'Q diperoleh :

sin (180 – α) = $\frac{y}{1}$ = y = sinα maka sin (180 – α) = sinα

cos (180 – α) = $\frac{-x}{1}$ = –x = –cosα maka cos (180 – α) = –cosα

tan (180 – α) = $\frac{y}{-x}$ = $-\frac{y}{x}$ = –tanα maka tan (180 – α) = –tanα

Sebuah lingkaran dengan jari-jari 1 satuan dengan ujung titik P(x, y) diletakkan pada koordinat Cartesius.



Kemudian pada kuadran III terdapat titik Q(–x, –y) pada lingkaran tersebut sehingga segitiga siku-siku OP'P dan OQ'Q kongruen. Dari segitiga OP'P diperoleh nilai :

Sinα = $\frac{y}{1}$ = y

cosα = $\frac{x}{1}$ = x

tanα = $\frac{y}{x}$

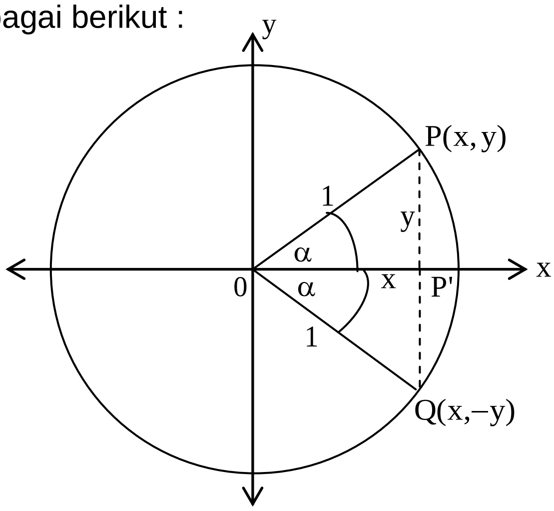
Dari segitiga OQ'Q diperoleh :

sin (180 + α) = $\frac{-y}{1}$ = –y = –sinα maka sin (180 + α) = –sinα

cos (180 + α) = $\frac{-x}{1}$ = –x = –cosα maka cos (180 + α) = –cosα

tan (180 + α) = $\frac{-y}{-x}$ = $\frac{y}{x}$ = tanα maka tan (180 + α) = tanα

Nilai perbandingan trigonometri untuk sudut-sudut istimewa dikuadran IV dapat dijelaskan sebagai berikut :



sebuah lingkaran dengan jari-jari 1 satuan dengan ujung titik P(x, y) diletakkan pada koordinat Cartesius.
Kemudian pada kuadran IV terdapat titik Q(x, –y) pada lingkaran tersebut sehingga segitiga siku-siku OPP' dan OQP' kongruen.

Dari segitiga OPP' diperoleh nilai : Sin α = $\frac{y}{1}$ = y   cos α = $\frac{x}{1}$ = x   tan α = $\frac{y}{x}$

Dari segitiga OQP' diperoleh :

sin (360 – α) = $\frac{-y}{1}$ = –y = –sin α maka sin (360 – α) = –sin α

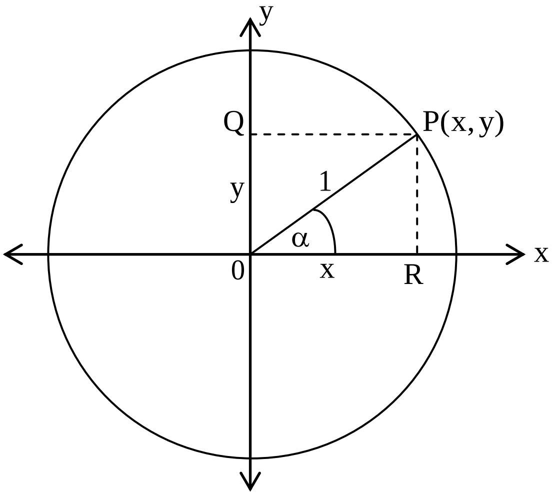
cos (360 – α) = $\frac{x}{1}$ = x = cos α maka cos (360 – α) = cos α

tan (360 – α) = $\frac{-y}{x}$ = $-\frac{y}{x}$ = –tan α maka tan (360 – α) = –tan α

Berdasarkan uraian di atas dapat ditarik kesimpulan bahwa dengan menggunakan aturan pelurus untuk sudut-sudut istimewa dalam interval $0^0 \leq x \leq 360^0$ berlaku hubungan :

sin (180 – α) = sin α	sin (180 + α) = –sin α	sin (360 – α) = –sin α
cos (180 – α) = –cos α	cos (180 + α) = –cos α	cos (360 – α) = cos α
tan (180 – α) = –tan α	tan (180 + α) = tan α	tan (360 – α) = –tan α

Disamping itu, dengan menggunakan aturan penyiku terdapat pula hubungan antara nilai-nilai perbandingan trigonometri di berbagai kuadran, yakni sebagai berikut :



sebuah lingkaran dengan jari-jari 1 satuan dengan ujung titik P(x, y) diletakkan pada koordinat Cartesius.
Sehingga pada segitiga siku-siku OPR berlaku :

Sin α = $\frac{y}{1}$ = y

cos α = $\frac{x}{1}$ = x

tan α = $\frac{y}{x}$

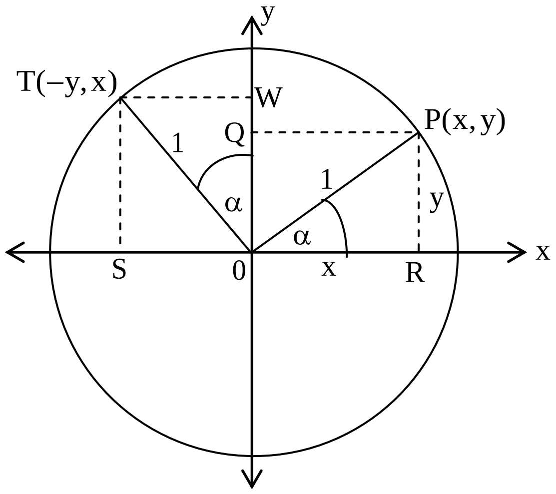
cot α = $\frac{x}{y}$

Dari segitiga siku-siku OPQ diperoleh :

sin (90^0 – α) = $\frac{x}{1}$ = x = cos α maka sin (90^0 – α) = cos α

cos (90^0 – α) = $\frac{y}{1}$ = y = sin α maka cos (90^0 – α) = sin α

tan (90^0 – α) = $\frac{x}{y}$ = cot α maka tan (90^0 – α) = cot α



Sebuah lingkaran dengan jari-jari 1 satuan dengan ujung titik P(x, y) diletakkan pada koordinat Cartesius.
Sehingga pada segitiga siku-siku OPR berlaku :

$\text{Sin}\,\alpha = \dfrac{y}{1} = y$

$\cos\alpha = \dfrac{x}{1} = x$

$\tan\alpha = \dfrac{y}{x}$

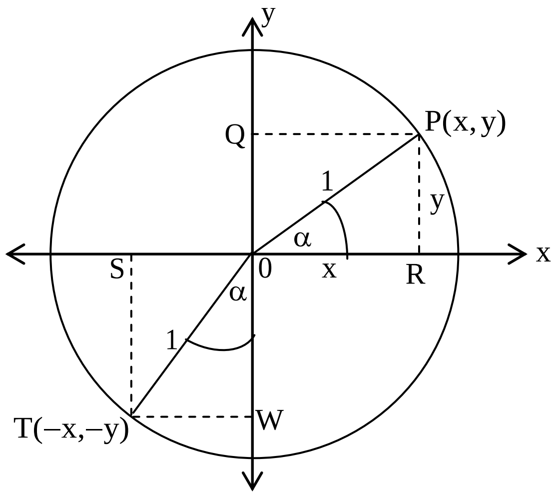
$\cot\alpha = \dfrac{x}{y}$

Terdapat pula titik T(–y, x) pada lingkaran yang membentuk segitiga siku-siku OTS sehingga berlaku:

$\sin(90^0 + \alpha) = \dfrac{x}{1} = x = \cos\alpha$ maka $\sin(90^0 + \alpha) = \cos\alpha$

$\cos(90^0 + \alpha) = \dfrac{-y}{1} = -y = -\sin\alpha$ maka $\cos(90^0 + \alpha) = -\sin\alpha$

$\tan(90^0 + \alpha) = \dfrac{x}{-y} = -\dfrac{x}{y} = -\cot\alpha$ maka $\tan(90^0 + \alpha) = -\cot\alpha$



Sebuah lingkaran dengan jari-jari 1 satuan dengan ujung titik P(x, y) diletakkan pada koordinat Cartesius.
Sehingga pada segitiga siku-siku OPR berlaku :

$\text{Sin}\,\alpha = \dfrac{y}{1} = y$ $\qquad \cos\alpha = \dfrac{x}{1} = x$

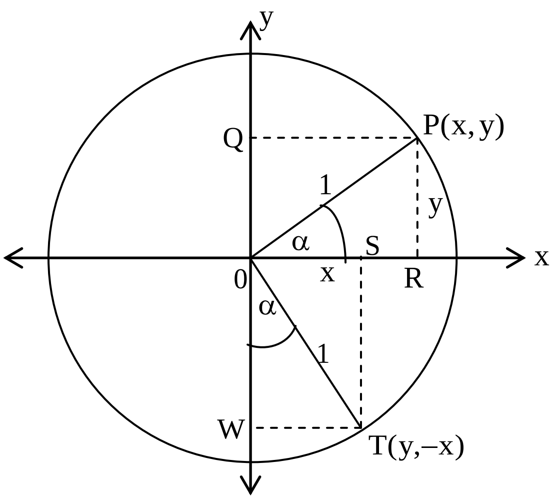
$\tan\alpha = \dfrac{y}{x}$ $\qquad \cot\alpha = \dfrac{x}{y}$

Terdapat pula titik T(–y, –x) pada lingkaran yang membentuk segitiga siku-siku OTS sehingga berlaku:

$\sin(270^0 - \alpha) = \dfrac{-x}{1} = -x = -\cos\alpha$ maka $\sin(270^0 - \alpha) = -\cos\alpha$

$\cos(270^0 - \alpha) = \dfrac{-y}{1} = -y = -\sin\alpha$ maka $\cos(270^0 - \alpha) = -\sin\alpha$

$\tan(270^0 - \alpha) = \dfrac{-x}{-y} = \dfrac{x}{y} = \cot\alpha$ maka $\tan(270^0 - \alpha) = \cot\alpha$



Sebuah lingkaran dengan jari-jari 1 satuan dengan ujung titik P(x, y) diletakkan pada koordinat Cartesius.
Sehingga pada segitiga siku-siku OPR berlaku :

$\text{Sin}\,\alpha = \dfrac{y}{1} = y$ $\quad\quad$ $\cos\alpha = \dfrac{x}{1} = x$

$\tan\alpha = \dfrac{y}{x}$ $\quad\quad$ $\cot\alpha = \dfrac{x}{y}$

Terdapat pula titik T(y, –x) pada lingkaran yang membentuk segitiga siku-siku OTS sehingga berlaku:

$\sin(270^0 + \alpha) = \dfrac{-x}{1} = -x = -\cos\alpha$ maka $\sin(270^0 + \alpha) = -\cos\alpha$

$\cos(270^0 + \alpha) = \dfrac{y}{1} = y = \sin\alpha$ maka $\cos(270^0 + \alpha) = \sin\alpha$

$\tan(270^0 + \alpha) = \dfrac{-x}{y} = -\dfrac{x}{y} = -\cot\alpha$ maka $\tan(270^0 + \alpha) = -\cot\alpha$

Berdasarkan uraian di atas dapat ditarik kesimpulan bahwa dengan menggunakan aturan pelurus untuk sudut-sudut istimewa dalam interval $0^0 \le x \le 360^0$ berlaku hubungan :

$\sin(90^0 - \alpha) = \cos\alpha$ $\quad\quad$ $\sin(90^0 + \alpha) = \cos\alpha$
$\cos(90^0 - \alpha) = \sin\alpha$ $\quad\quad$ $\cos(90^0 + \alpha) = -\sin\alpha$
$\tan(90^0 - \alpha) = \cot\alpha$ $\quad\quad$ $\tan(90^0 + \alpha) = -\cot\alpha$

$\sin(270^0 - \alpha) = -\cos\alpha$ $\quad\quad$ $\sin(270^0 + \alpha) = -\cos\alpha$
$\cos(270^0 - \alpha) = -\sin\alpha$ $\quad\quad$ $\cos(270^0 + \alpha) = \sin\alpha$
$\tan(270^0 - \alpha) = \cot\alpha$ $\quad\quad$ $\tan(270^0 + \alpha) = -\cot\alpha$

Untuk lebih jelasnya akan diuraikan pada contoh soal berikut :

01. Tentukanlah nilai dari :
(a) $\cos 150^0$ $\quad\quad$ (b) $\sin 225^0$
(c) $\tan 240^0$ $\quad\quad$ (d) $\sec 135^0$
(d) $\csc 300^0$ $\quad\quad$ (e) $\cot 120^0$

Jawab
(a) $\cos 150^0 = \cos(180 - 30)^0$
$= -\cos 30^0$
$= -\dfrac{1}{2}\sqrt{3}$

(b) $\sin 225^0 = \sin (180 + 45)^0$
$= -\sin 45^0$
$= -\frac{1}{2}\sqrt{2}$

(c) $\tan 240^0 = \tan (180 + 60)^0$
$= \tan 60^0$
$= \sqrt{3}$

(d) $\sin 300^0 = \sin (360 - 60)^0$
$= \sin 60^0$
$= -\frac{\sqrt{3}}{2}$

Jadi $\csc 300^0 = -\frac{2}{\sqrt{3}}$

$= -\frac{2}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$

$= -\frac{2}{3}\sqrt{3}$

(e) $\tan 120^0 = \tan (180 - 60)^0$
$= -\tan 60^0$
$= -\sqrt{3}$

Jadi $\text{ctg } 120^0 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$

$= -\frac{1}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$

$= -\frac{1}{3}\sqrt{3}$

02. Jika diketahui $\cos \alpha = \frac{1}{3}$ dan α pada kuadran IV maka tentukanlah nilai

(a) $\sin \alpha$ (b) $\tan \alpha$ (d) $\sec \alpha$

Jawab

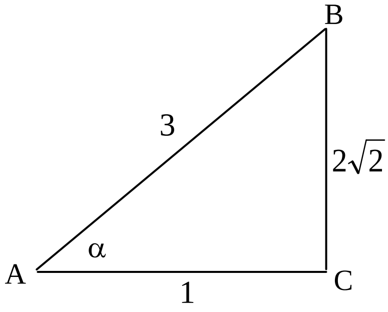
Jika diketahui nilai $\cos \alpha = \frac{1}{3}$, maka untuk menentukan nilai-nilai perbandingan trigonometri yang lain, kita menggunakan bantuan segitiga siku-siku.

$BC^2 = 3^2 - 1^2$

$BC^2 = 8$

$BC = \sqrt{8}$

$BC = 2\sqrt{2}$



Sehingga karena α pada kuadran IV maka diperoleh :

(a) $\sin\alpha = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$

(b) $\tan\alpha = -\frac{2\sqrt{2}}{1} = -2\sqrt{2}$

(c) $\sec\alpha = \frac{3}{1} = 3$

03. Tentukanlah nilai dari :

(a) $\cos\frac{5}{3}\pi$ (b) $\sin\frac{7}{6}\pi$ (c) $\tan\frac{3}{2}\pi$

Jawab

(a) $\cos\frac{5}{3}\pi = \cos\left(\frac{5}{3} \times 180^0\right)$
$= \cos 300^0$
$= \cos (360 - 60)^0$
$= \cos 60^0$
$= 1/2$

(b) $\sin\frac{7}{6}\pi = \sin\left(\frac{7}{6} \times 180^0\right)$
$= \sin 210^0$
$= \sin (180 + 30)^0$
$= -\sin 30^0$
$= -1/2$

(c) $\tan\frac{3}{2}\pi = \tan\left(\frac{3}{2} \times 180^0\right)$
$= \tan 270^0$
$= \tan (180 + 90)^0$
$= \tan 90^0$
= tidak ada

Aturan lain yang diambil dari sudut ($360^0 - \alpha$) adalah aturan sudut negatif. Dimana aturan yang dipakai adalah sebagai berikut:

$\sin(360^0 - \alpha) = -\sin\alpha$ $\cos(360^0 - \alpha) = \cos\alpha$ $\tan(360^0 - \alpha) = -\tan\alpha$
$\sin(0^0 - \alpha) = -\sin\alpha$ $\cos(0^0 - \alpha) = \cos\alpha$ $\tan(0^0 - \alpha) = -\tan\alpha$
$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$ $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$ $\tan(-\alpha) = -\tan\alpha$

Untuk menentukan nilai perbandingan trigonometri terhadap sudut-sudut yang besarnya lebih dari 360^0 maka digunakanlah aturan periodisitas trigonometri.
Nilai sinus dan cosinus akan berulang setiap kelipatan 360^0 sedangkan nilai tangens akan berulang setiap 180^0. ini berati $\sin 30^0 = \sin 390^0 = \sin 750^0$ dan seterusnya.
Sehingga dapat dirumuskan :

$$\left.\begin{aligned} \sin(k.360^0 + \alpha) &= \sin\alpha \\ \cos(k.360^0 + \alpha) &= \cos\alpha \\ \tan(k.180^0 + \alpha) &= \tan\alpha \end{aligned}\right\} \text{dimana k adalah bilangan bulat}$$

Namun dalam praktiknya aturan periodisitas di atas dapat disederhanakan dengan rumusan :

$\sin(\alpha - k.360^0) = \sin\alpha$

$\cos(\alpha - k.360^0) = \cos\alpha$

$\tan(\alpha - k.360^0) = \tan\alpha$

dimana k adalah bilangan asli dan $\alpha \geq k.360^0$

Untuk lebih jelasnya akan diuraikan pada contoh soal berikut :

04. Tentukanlah nilai dari

(a) $\sin(-315)^0$ (b) $\cos\left(-\frac{4}{3}\pi\right)$

Jawab

(a) $\sin(-315)^0 = -\sin 315^0$

$= -\sin(360 - 45)^0$

$= \sin 45^0$

$= \frac{1}{2}\sqrt{2}$

(b) $\cos\left(-\frac{4}{3}\pi\right) = \cos\frac{4}{3}\pi$

$= \cos\left(\frac{4}{3}\ x\ 180^0\right)$

$= \cos 240^0$

$= \cos(180 + 60)^0$

$= -\cos 60^0$

$= -\frac{1}{2}\sqrt{3}$

05. Tentukanlah nilai dari

(a) $\cos 930^0$ (b) $\sin 1215^0$ (c) $\tan 600^0$

Jawab

(a) $\cos 930^0 = \cos(930 - 720)^0$

$= \cos 210^0$

$= \cos(180 + 30)^0$

$= -\cos 30^0$

$= -\frac{1}{2}\sqrt{3}$

(b) $\sin 1215^0 = \sin(1215 - 1080)^0$

$= \sin 135^0$

$= \sin(180 - 45)^0$

$= \sin 45^0$

$= \frac{1}{2}\sqrt{2}$

(b) $\tan 600^0 = \tan (600 - 360)^0$
$= \tan 240^0$
$= \tan (180 + 60)^0$
$= \tan 60^0$
$= \sqrt{3}$

06. Tentukanlah nilai dari

(a) $\sin \frac{11}{3}\pi$ (b) $\cos \frac{20}{3}\pi$ (c) $\csc \frac{25}{6}\pi$

Jawab

(a) $\sin \frac{11}{3}\pi = \sin (\frac{11}{3} \text{ x } 180)^0$
$= \sin 660^0$
$= \sin (660 - 360)^0$
$= \sin 300^0$
$= \sin (360 - 60)^0$
$= -\sin 60^0$
$= -\frac{1}{2}\sqrt{3}$

(b) $\cos \frac{20}{3}\pi = \cos (\frac{20}{3} \text{ x } 180)^0$
$= \cos 1200^0$
$= \cos (1200 - 1080)^0$
$= \cos 120^0$
$= \cos (180 - 60)^0$
$= -\cos 60^0$
$= -\frac{1}{2}$

(c) $\sin \frac{25}{6}\pi = \sin (\frac{25}{6} \text{ x } 180)^0$
$= \sin 750^0$
$= \sin (750 - 732)^0$
$= \sin 30^0$
$= \frac{1}{2}$

Jadi $\csc \frac{25}{6}\pi = \frac{2}{1} = 2$