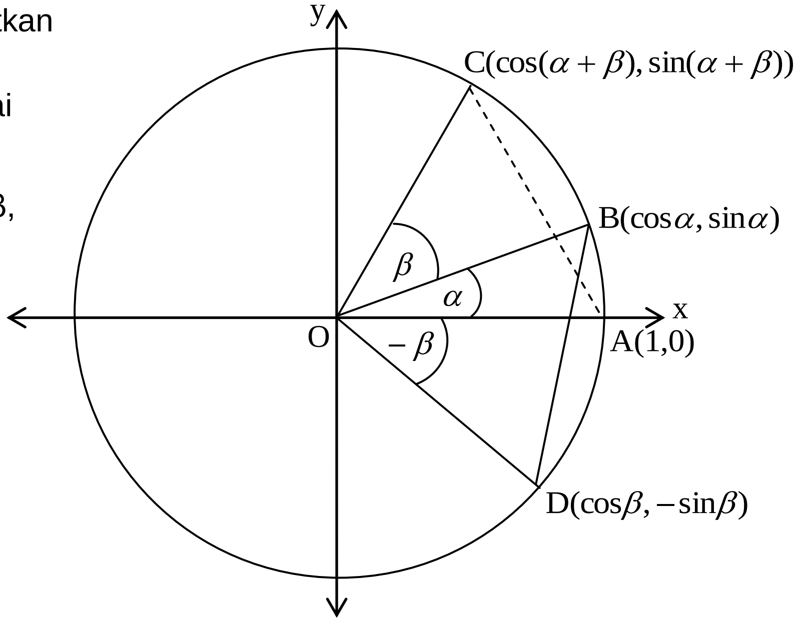
RUMUS-RUMUS TRIGONOMETRI

A. Rumus Jumlah dan Selisih Dua Sudut

Pada gambar di samping diperlihatkan sebuah lingkaran dengan jari-jari 1 satuan, sehingga titik A mempunyai koordinat (1, 0).

Misalkan <AOB = α, dan <BOC = β, maka <AOC = α +β



Dengan mengambil sudut pertolongan <AOD = –β, maka Δ AOC kongruen dengan Δ BOD, akibatnya :

AC = BD

$AC^2 = BD^2$ ………………………………………………………….……………….. (1)

Karena jari-jari lingkaran 1 satuan, maka berdasarkan rumus koordinat didapatkan :
Koordinat titik B(cos α, sin α)
Koordinat tititk C ((cos(α+β), sin(α+β))
Koordinat titik D(cos(–β), sin(–β)) = D(cosβ, –sinβ)

Dengan menggunakan rumus jarak dua titik diperoleh :

Titik A(1, 0) dan C(cos(α+β), sin(α+β))

$AC^2 = \{ \cos(\alpha+\beta) - 1\}^2 + \{ \sin(\alpha+\beta) - 0\}^2$

$AC^2 = \cos^2(\alpha+\beta) - 2 \cos(\alpha+\beta) + 1 + \sin^2(\alpha+\beta)$

$AC^2 = \cos^2(\alpha+\beta)\ ^2 + \sin^2(\alpha+\beta) + 1 - 2\cos(\alpha+\beta)$

$AC^2 = 1 + 1 - 2\cos(\alpha+\beta)$

$AC^2 = 2 - 2\cos(\alpha+\beta)$ ………………………………………………………………. (2)

Titik B(cos α, sin α) dan D(cosβ, –sinβ)

$BD^2 = (\cos \beta - \cos \alpha)^2 + (-\sin \beta - \sin \alpha)^2$

$BD^2 = \cos^2\beta - 2\cos\beta.\cos\alpha + \cos^2\alpha + \sin^2\beta + 2\sin\beta.\sin\alpha + \sin^2\alpha$

$BD^2 = (\cos^2\beta + \sin^2\beta) + (\cos^2\alpha + \sin^2\alpha) - 2\cos\alpha.\cos\beta + 2\sin\alpha.\sin\beta$

$BD^2 = 1 + 1 - 2\cos\alpha.\cos\beta + 2\sin\alpha.\sin\beta$

$AC^2 = 2 - 2\cos\alpha.\cos\beta + 2\sin\alpha.\sin\beta$ ………………………………………………. (3)

Karena $AC^2 = BD^2$ diproleh hubungan :

$2 - 2\cos(\alpha+\beta) = 2 - 2\cos\alpha.\cos\beta + 2\sin\alpha.\sin\beta$

$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha.\cos\beta - \sin\alpha.\sin\beta$

Jadi rumus identitas cosinus jumlah dua sudut adalah :

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha.\cos\beta - \sin\alpha.\sin\beta$$

Rumus untuk cos (α – β) dapat diperoleh dari rumus cos(α + β) dengan cara mengganti sudut β dengan sudut (–β) sebagai berikut :

$\cos(\alpha + (-\beta)) = \cos\alpha.\cos(-\beta) - \sin\alpha.\sin(-\beta)$
$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha.\cos\beta - (-\sin\alpha.\sin\beta)$
$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha.\cos\beta + \sin\alpha.\sin\beta$

Jadi rumus identitas cosinus selisih dua sudut adalah :

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha.\cos\beta + \sin\alpha.\sin\beta$$

Untuk lebih jelasnya, pelajarilah contoh soal berikut ini:

01. Tentukanlah nilai dari :
    (a) $\cos 75^0$
    (b) $\cos 165^0$

    Jawab

    (a) $\cos 75^0 = \cos(45^0 + 30^0)$
    $= \cos 45^0.\cos 30^0 - \sin 45^0.\sin 30^0$
    $= (\frac{1}{2}\sqrt{2})(\frac{1}{2}\sqrt{3}) - (\frac{1}{2}\sqrt{2})(\frac{1}{2})$
    $= \frac{1}{4}\sqrt{6} - \frac{1}{4}\sqrt{2}$
    $= \frac{1}{4}(\sqrt{6} - \sqrt{2})$

(b) $\cos 165^0 = \cos(210^0 - 45^0)$

$= \cos 210^0.\cos 45^0 + \sin 210^0.\sin 45^0$

$= (-\frac{1}{2}\sqrt{3})(\frac{1}{2}\sqrt{2}) + (-\frac{1}{2})(\frac{1}{2}\sqrt{2})$

$= -\frac{1}{4}\sqrt{6} - \frac{1}{4}\sqrt{2}$

$= -\frac{1}{4}(\sqrt{6} + \sqrt{2})$

Untuk mendapatkan rumus sin (α + β) dapat diperoleh dengan menggunakan rumus-rumus yang pernah diperlajari sebelumnya, yakni :

$\sin(90^0 - \alpha) = \sin\alpha$ dan $\cos(90^0 - \alpha) = \cos\alpha$

sehingga diperoleh : $\sin(\alpha + \beta) = \cos[90^0 - (\alpha + \beta)]$

$\sin(\alpha + \beta) = \cos[(90^0 - \alpha) - \beta]$

$\sin(\alpha + \beta) = \cos(90^0 - \alpha).\cos\beta + \sin(90^0 - \alpha).\sin\beta$

$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha.\cos\beta + \cos\alpha.\sin\beta$

Jadi rumus untuk identitas sinus jumlah dua sudut adalah :

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha.\cos\beta + \cos\alpha.\sin\beta$$

Rumus untuk sin (α – β) dapat diperoleh dari rumus sin(α + β) dengan cara mengganti sudut β dengan sudut (–β) sebagai berikut :

$\sin(\alpha + (-\beta)) = \sin\alpha.\cos(-\beta) + \cos\alpha.\sin(-\beta)$

$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha.\cos\beta + (-\cos\alpha.\sin\beta)$

$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha.\cos\beta - \cos\alpha.\sin\beta$

Jadi rumus identitas sinus selisih dua sudut adalah :

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha.\cos\beta - \cos\alpha.\sin\beta$$

Untuk lebih jelasnya, pelajarilah contoh soal berikut ini:

02. Tentukanlah nilai dari :

(a) $\sin 15^0$ (b) $\sin 285^0$

Jawab

(a) $\sin 15^0 = \sin(45^0 - 30^0)$

$= \sin 45^0.\cos 30^0 - \cos 45^0.\sin 30^0$

$= (\frac{1}{2}\sqrt{2})(\frac{1}{2}\sqrt{3}) - (\frac{1}{2}\sqrt{2})(\frac{1}{2})$

$= \frac{1}{4}\sqrt{6} - \frac{1}{4}\sqrt{2}$

$= \frac{1}{4}(\sqrt{6} - \sqrt{2})$

(b) $\sin 285^0 = \sin(240^0 + 45^0)$

$= \sin 240^0.\cos 45^0 + \cos 240^0.\sin 45^0$

$= (-\frac{1}{2}\sqrt{3})(\frac{1}{2}\sqrt{2}) - (-\frac{1}{2})(\frac{1}{2}\sqrt{2})$

$= -\frac{1}{4}\sqrt{6} + \frac{1}{4}\sqrt{2}$

$= -\frac{1}{4}(\sqrt{6} - \sqrt{2})$

Untuk mendapatkan rumus tan(α + β) diperoleh berdasarkan rumus perbandingan $\tan \alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, maka

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}$$

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\sin\alpha.\cos\beta + \cos\alpha.\sin\beta}{\cos\alpha.\cos\beta - \sin\alpha.\sin\beta} \text{ x } \frac{\frac{1}{\cos\alpha.\cos\beta}}{\frac{1}{\cos\alpha.\cos\beta}}$$

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\frac{\sin\alpha.\cos\beta}{\cos\alpha.\cos\beta} + \frac{\cos\alpha.\sin\beta}{\cos\alpha.\cos\beta}}{\frac{\cos\alpha.\cos\beta}{\cos\alpha.\cos\beta} - \frac{\sin\alpha.\sin\beta}{\cos\alpha.\cos\beta}}$$

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\frac{\sin\alpha.}{\cos\alpha.} + \frac{\sin\beta}{\cos\beta}}{1 - \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\frac{\sin\beta}{\cos\beta}}$$

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha.\tan\beta}$$

Jadi rumus untuk tan(α + β) adalah :

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha.\tan\beta}$$

Rumus untuk tan (α – β) dapat diperoleh dari rumus tan(α + β) dengan cara mengganti sudut β dengan sudut (–β) sebagai berikut :

tan(α – β) = tan(α + (–β))

$$= \frac{\tan\alpha + \tan(-\beta)}{1 - \tan\alpha.\tan(-\beta)}$$

$$= \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha.\tan\beta}$$

Jadi rumus untuk tan(α – β) adalah :

$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha.\tan\beta}$$

Untuk lebih jelasnya, pelajarilah contoh soal berikut ini:

03. Tentukanlah nilai dari :

(a) tan 105^0 (b) tan 255^0

Jawab

(a) tan 105^0 = tan(60^0 + 45^0)

$$= \frac{\tan 60^0 + \tan 45^0}{1 - \tan 60^0.\tan 45^0}$$

$$= \frac{\sqrt{3} + 1}{1 - (\sqrt{3})(1)}$$

$$= \frac{1+\sqrt{3}}{1 - \sqrt{3}} \text{ x } \frac{1+\sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}}$$

$$= \frac{1+\sqrt{3}+\sqrt{3}+3}{1 - 3}$$

$$= \frac{4+2\sqrt{3}}{-2}$$

$$= -2-\sqrt{3}$$

(b) tan 255^0 = tan(300^0 – 45^0)

$$= \frac{\tan 300^0 - \tan 45^0}{1 + \tan 300^0.\tan 45^0}$$

$$= \frac{-\sqrt{3} - 1}{1 + (-\sqrt{3})(1)}$$

$$= \frac{-1-\sqrt{3}}{1 - \sqrt{3}} \text{ x } \frac{1+\sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}}$$

$$= \frac{-1-\sqrt{3}-\sqrt{3}-3}{1 - 3}$$

$= \dfrac{-4-2\sqrt{3}}{-2}$

$= 2+\sqrt{3}$

04. Tentukanlah nilai dari :

(a) sec 255^0 (b) cot 345^0

Jawab

(a) cos 255^0 $= \cos(210^0 + 45^0)$

$= \cos 210^0.\cos 45^0 - \sin 210^0.\sin 45^0$

$= (-\frac{1}{2}\sqrt{3})(\frac{1}{2}\sqrt{2}) - (-\frac{1}{2})(\frac{1}{2}\sqrt{2})$

$= -\frac{1}{4}\sqrt{6} + \frac{1}{4}\sqrt{2}$

$= \dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$

Jadi sec 255^0 = $\dfrac{4}{\sqrt{2}-\sqrt{6}}$

$= \dfrac{4}{\sqrt{2}-\sqrt{6}} \text{ x } \dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{\sqrt{2}+\sqrt{6}}$

$= \dfrac{4(\sqrt{2}+\sqrt{6})}{2-6}$

$= \dfrac{4(\sqrt{2}+\sqrt{6})}{-4}$

$= -(\sqrt{2}+\sqrt{6})$

(b) tan 345^0 $= \tan(300^0 + 45^0)$

$= \dfrac{\tan 300^0 + \tan 45^0}{1 - \tan 300^0.\tan 45^0}$

$= \dfrac{-\sqrt{3} + 1}{1 - (-\sqrt{3})(1)}$

$= \dfrac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}$

Jadi cot 345^0 = $\dfrac{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}$

$= \dfrac{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}} \text{ x } \dfrac{1+\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}$

$= \dfrac{1+\sqrt{3}+\sqrt{3}+3}{1-3}$

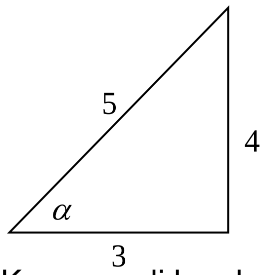
$$= \frac{4+2\sqrt{3}}{-2}$$

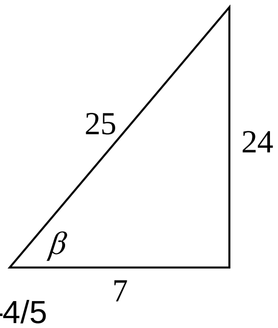
$$= -(2+\sqrt{3})$$

05. Diketahui sin α = –4/5 dan cos β = 7/25, dimana α sudut di kwadran III dan β di kuadran IV. Tentukanlah nilai dari :

(a) sin $(\alpha - \beta)$ (b) cos $(\alpha - \beta)$ (c) tan$(\alpha - \beta)$

Jawab





Karena α di kuadran III maka sin α = –4/5
cos α = –3/5
tan α = 3/4

Karena β di kuadran IV maka sin β = –24/25
cos β = 7/25
tan β = –24/7

sehingga :

(a) sin (α – β) = sinα.cosβ – cosα.sinβ

$$= \left(-\frac{4}{5}\right)\left(\frac{7}{25}\right) - \left(-\frac{3}{5}\right)\left(-\frac{24}{25}\right)$$

$$= -\frac{28}{125} - \frac{72}{125}$$

$$= -\frac{100}{125}$$

$$= -\frac{4}{5}$$

(b) cos (α – β) = cosα.cosβ + sinα.sinβ

$$= \left(-\frac{3}{5}\right)\left(\frac{7}{25}\right) + \left(-\frac{4}{5}\right)\left(-\frac{24}{25}\right)$$

$$= -\frac{21}{125} + \frac{96}{125}$$

$$= \frac{75}{125}$$

$$= \frac{3}{5}$$

(c) $\tan(\alpha + \beta) = \dfrac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha . \tan\beta}$

$= \dfrac{(3/4) + (-24/7)}{1 - (3/4)(-24/7)}$

$= \dfrac{(3/4) - (24/7)}{1 + (72/28)} \times \dfrac{28}{28}$

$= \dfrac{21 - 96}{28 + 72}$

$= -\dfrac{75}{100}$

$= -\dfrac{3}{4}$

06. Buktikanlah bahwa : $\dfrac{\cos(A+B)}{\cos A.\cos B} - 1 = -\tan A.\tan B$

Jawab

Ruas kiri $= \dfrac{\cos(A+B)}{\cos A.\cos B}$

$= \dfrac{\cos A.\cos B - \sin A.\sin B}{\cos A.\cos B}$

$= \dfrac{\cos A.\cos B}{\cos A.\cos B} - \dfrac{\sin A.\sin B}{\cos A.\cos B}$

$= 1 - \tan A.\tan B$

= ruas kanan

07. Buktikanlah bahwa $\cos(A + B).\cos(A - B) = \cos^2 A - \sin^2 B$

Jawab

Ruas kiri $= \cos(A + B).\cos(A - B)$

$= (\cos A.\cos B - \sin A.\sin B)(\cos A.\cos B + \sin A.\sin B)$

$= \cos^2 A.\cos^2 B - \sin^2 A.\sin^2 B$

$= \cos^2 A.(1 - \sin^2 B) - (1 - \cos^2 A).\sin^2 B$

$= \cos^2 A - \cos^2 A.\sin^2 B - \sin^2 B + \cos^2 A.\sin^2 B$

$= \cos^2 A - \sin^2 B$

= ruas kanan