

VEKTOR

E. Proyeksi Ortogonal Suatu Vektor Pada Vektor Lain

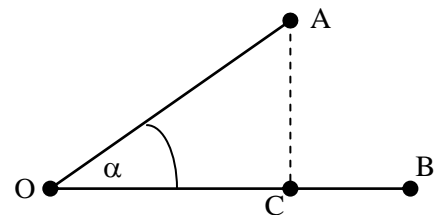
Misalkan vector $\overline{OA} = \vec{a}$, $\overline{OB} = \vec{b}$ dan $\overline{OC} = \vec{c}$

maka \vec{c} adalah proyeksi vector \vec{a} pada \vec{b}

Panjang vector \vec{c} dapat ditentukan dengan

aturan :

$$\cos \alpha = \frac{|\overline{OC}|}{|\overline{OA}|} = \frac{|\vec{c}|}{|\vec{a}|} \dots\dots\dots (1)$$



Menurut rumus sudut antara dua vector \vec{a} dan \vec{b} diperoleh :

$$\cos \alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} \dots\dots\dots (2)$$

Dari (1) dan (2) didapat $\frac{|\vec{c}|}{|\vec{a}|} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|}$ maka $|\vec{c}| = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|}$

Jadi panjang proyeksi \vec{a} pada \vec{b} dirumuskan : $|\vec{c}| = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|}$

Dimana panjang proyeksi tersebut dinamakan juga *Proyeksi skalar* \vec{a} pada \vec{b}

Untuk menentukan persamaan vector proyeksi \vec{c} dapat dilakukan dengan proses sebagai berikut

Karena \overline{OC} segaris dengan \overline{OB} , maka terdapat $k \in \text{Real}$ sehingga $\overline{OC} = k \cdot \overline{OB}$, sehingga

$\vec{c} = k \cdot \vec{b}$ dimana $k = \frac{|\vec{c}|}{|\vec{b}|}$ sehingga $\vec{c} = \frac{|\vec{c}|}{|\vec{b}|} \cdot \vec{b}$

$$\vec{c} = \left(\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} \right) \cdot \vec{b}$$

Jadi persamaan vektor proyeksi \vec{a} pada \vec{b} dirumuskan : $\vec{c} = \left(\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} \right) \cdot \vec{b}$

Untuk lebih jelasnya ikutilah contoh soal berikut ini :

01. Diketahui $\vec{a} = 8\vec{i} - 4\vec{j} + \vec{k}$ dan $\vec{b} = 4\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$. Tentukanlah panjang vector proyeksi \vec{b} pada \vec{a}

Jawab

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (8)(4) + (-4)(2) + (1)(3) = 32 - 8 + 3 = 27$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{8^2 + (-4)^2 + 1^2} = \sqrt{64 + 16 + 1} = \sqrt{81} = 9$$

$$\text{Proyeksi skalar } \vec{b} \text{ pada } \vec{a} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|} = \frac{27}{9} = 3$$

02. Diketahui $\vec{a} = 3\vec{i} - 2\vec{j} + 4\vec{k}$ dan $\vec{b} = 2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$. Tentukanlah persamaan vektor proyeksi \vec{a} pada \vec{b}

Jawab

Misalkan vektor proyeksi \vec{a} pada \vec{b} dinamakan \vec{c} , maka

$$\vec{c} = \left(\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} \right) \cdot \vec{b}$$

$$\vec{c} = \left(\frac{(3)(2) + (-2)(-1) + (4)(1)}{2^2 + (-1)^2 + 1^2} \right) \cdot \vec{b}$$

$$\vec{c} = \left(\frac{6 + 2 + 4}{4 + 1 + 1} \right) \cdot \vec{b}$$

$$\vec{c} = \left(\frac{12}{6} \right) \cdot \vec{b}$$

$$\vec{c} = 2\vec{b}$$

$$\vec{c} = 2(2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k})$$

$$\vec{c} = 4\vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k}$$

03. Diketahui titik A(-5, 1, 2), B(-3, 2, 4) dan C(0, 1, 4). Tentukan vektor proyeksi \overline{BA} pada \overline{BC}

Jawab

$$\overline{BA} = \begin{bmatrix} -5 - (-3) \\ 1 - 2 \\ 2 - 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix} \quad \overline{BC} = \begin{bmatrix} 0 - (-3) \\ 1 - 2 \\ 4 - 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

maka

$$\text{vektor proyeksi} = \left(\frac{(-2)(3) + (-1)(-1) + (-2)(0)}{3^2 + (-1)^2 + 0^2} \right) \cdot \overline{BC}$$

$$\text{vektor proyeksi} = \left(\frac{-6+1+0}{9+1} \right) \cdot \overline{BC}$$

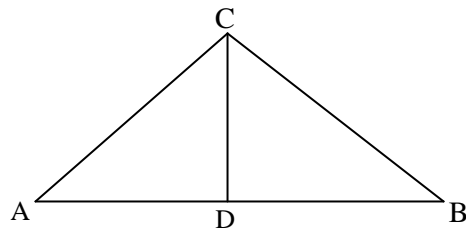
$$\text{vektor proyeksi} = \left(\frac{-5}{10} \right) \cdot \overline{BC}$$

$$\text{vektor proyeksi} = -\frac{1}{2} \overline{BC}$$

$$\text{vektor proyeksi} = -\frac{1}{2} (3\bar{i} - \bar{j} + 0\bar{k})$$

$$\text{vektor proyeksi} = -\frac{3}{2} \bar{i} + \frac{1}{2} \bar{j}$$

04. Diketahui segitiga ABC seperti pada gambar berikut. Jika titik A(-4, 3, 2), B(0, 2, 3) dan C(-2, 6, 9) maka tentukanlah panjang ruas garis AD
Jawab



$$\overline{AB} = \begin{bmatrix} 0 - (-4) \\ 2 - 3 \\ 3 - 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \overline{AC} = \begin{bmatrix} -2 - (-4) \\ 6 - 3 \\ 9 - 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 7 \end{bmatrix}$$

$$\text{Maka : } |\overline{AD}| = \frac{|\overline{AC} \cdot \overline{AB}|}{|\overline{AB}|}$$

$$|\overline{AD}| = \frac{(2)(4) + (3)(-1) + (7)(1)}{\sqrt{4^2 + (-1)^2 + 1^2}}$$

$$|\overline{AD}| = \frac{8 - 3 + 7}{\sqrt{16 + 1 + 1}}$$

$$|\overline{AD}| = \frac{12}{\sqrt{18}}$$

$$|\overline{AD}| = \frac{12}{3\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$$

$$|\overline{AD}| = \frac{12\sqrt{2}}{6}$$

$$|\overline{AD}| = 2\sqrt{2}$$

05. Diketahui $\bar{a} = 2\bar{i} + 3\bar{j} - \bar{k}$ dan $\bar{b} = x\bar{i} + 2\bar{j} + \bar{k}$. Jika panjang proyeksi vektor \bar{a} pada \bar{b} sama dengan 3 maka tentukanlah nilai x
Jawab

$$\text{Proyeksi skalar } \bar{a} \text{ pada } \bar{b} = \frac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{|\bar{b}|} = 3$$

$$\frac{(2)(x) + (3)(2) + (-1)(1)}{\sqrt{x^2 + 2^2 + 1^2}} = 3$$

$$2x + 6 - 1 = 3\sqrt{x^2 + 5}$$

$$2x + 5 = 3\sqrt{x^2 + 5}$$

$$(2x + 5)^2 = 9(x^2 + 5)$$

$$4x^2 + 20x + 25 = 9x^2 + 45$$

$$0 = 9x^2 + 45 - 4x^2 - 20x - 25$$

$$0 = 5x^2 - 20x + 20$$

$$0 = x^2 - 4x + 4$$

$$0 = (x - 2)(x - 2)$$

$$\text{Jadi } x = 2$$