

PERSAMAAN DAN PERTIDAKSAMAAN NILAI MUTLAK

C. Pertidaksamaan Nilai Mutlak

Pertidaksamaan nilai mutlak adalah suatu pertidaksamaan yang melibatkan bentuk nilai mutlak. Untuk menyelesaikannya, dapat digunakan sifat berikut ini:

Bentuk 1

Dapat diselesaikan dengan menggunakan sifat nilai mutlak, yaitu :

(a). Jika $|f(x)| < a$ maka $-a < f(x) < a$

(b). Jika $|f(x)| > a$ maka $f(x) < -a$ atau $f(x) > a$

Atau dengan mengkuadratkan kedua ruas kiri dan kanan, yaitu :

(a). Jika $|f(x)| < a$ maka $f^2(x) < a^2$

(b). Jika $|f(x)| > a$ maka $f^2(x) > a^2$

Bentuk 2

Dapat diselesaikan dengan menggunakan sifat nilai mutlak, yaitu :

(a). Jika $|f(x)| < g(x)$ maka $f(x) > -g(x)$ dan $f(x) < g(x)$

(b). Jika $|f(x)| > g(x)$ maka $f(x) < -g(x)$ atau $f(x) > g(x)$

Atau dengan mengkuadratkan kedua ruas kiri dan kanan, yaitu :

(a). Jika $|f(x)| < g(x)$ maka $f^2(x) < g^2(x)$

(b). Jika $|f(x)| > g(x)$ maka $f^2(x) > g^2(x)$

Dengan catatan jika x_1 adalah penyelesaiannya, maka $g(x_1) \geq 0$

Bentuk 3

Dapat diselesaikan dengan mengkuadratkan kedua ruas kiri dan kanan, yaitu :

(a). Jika $|f(x)| < |g(x)|$ maka $f^2(x) < g^2(x)$.

(b). Jika $|f(x)| > |g(x)|$ maka $f^2(x) > g^2(x)$.

Untuk lebih memahami pertidaksamaan nilai mutlak, perhatikan contoh berikut :

01. Tentukanlah interval nilai x yang memenuhi pertidaksamaan berikut ini :

(a) $|2x + 3| < 5$

(b) $|4x - 2| < 10$

(c) $|2 - 3x| < 8$

(d) $|2x + 6| > 4$

(e) $|5 - 3x| > 4$

Jawab

(a) $|2x + 3| < 5$

$$-5 < 2x + 3 < 5$$

$$-5 - 3 < 2x + 3 - 3 < 5 - 3$$

$$-8 < 2x < 2$$

$$-4 < x < 1$$

(b) $|4x - 2| < 10$

$$-10 < 4x - 2 < 10$$

$$-10 + 2 < 4x < 10 + 2$$

$$-8 < 4x < 12$$

$$-2 < x < 6$$

$$\begin{aligned}
 \text{(c)} \quad & |2 - 3x| < 8 \\
 & -8 < 2 - 3x < 8 \\
 & -8 - 2 < 2 - 3x - 2 < 8 - 2 \\
 & -10 < -3x < 6 \\
 & 10/3 > x > -2 \\
 & -2 < x < 10/3
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{(d)} \quad & |2x + 6| > 4 \\
 & 2x + 6 < -4 \text{ atau } 2x + 6 > 4 \\
 & 2x < -4 - 6 \text{ atau } 2x > 4 - 6 \\
 & 2x < -10 \text{ atau } 2x > -2 \\
 & x < -5 \text{ atau } x > -1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{(e)} \quad & |5 - 3x| > 4 \\
 & 5 - 3x < -4 \text{ atau } 5 - 3x > 4 \\
 & -3x < -4 - 5 \text{ atau } -3x > 4 - 5 \\
 & -3x < -10 \text{ atau } -3x > -1 \\
 & x > 10/3 \text{ atau } x < 1/3 \\
 & x < 1/3 \text{ atau } x > 10/3
 \end{aligned}$$

02. Tentukanlah interval nilai x yang memenuhi pertidaksamaan berikut ini :

$$\text{(a)} \quad |3x - 2| < 2x + 7$$

$$\text{(b)} \quad |2x - 9| < 4x - 3$$

$$\text{(c)} \quad |3x - 9| > 4x - 5$$

$$\text{(d)} \quad |x + 4| > 2x + 5$$

Jawab

$$\text{(a)} \quad |3x - 2| < 2x + 7$$

$$3x - 2 > -(2x + 7) \quad \text{dan} \quad 3x - 2 < 2x + 7$$

$$3x - 2 > -2x - 7 \quad \text{dan} \quad 3x - 2x < 2 + 7$$

$$5x > -5 \quad \text{dan} \quad x < 9$$

$$x > -1$$

$$\text{sehingga : } -1 < x < 9$$

$$\text{(b)} \quad |2x - 9| < 4x - 3$$

$$2x - 9 > -(4x - 3) \quad \text{dan} \quad 2x - 9 < 4x - 3$$

$$2x - 9 > -4x + 3 \quad \text{dan} \quad 2x - 4x < 9 - 3$$

$$6x > 12 \quad \text{dan} \quad -2x < 6$$

$$x > 2 \quad \text{dan} \quad x > 3$$

$$\text{sehingga : } x > 3$$

$$\text{(c)} \quad |3x - 9| > 4x - 5$$

$$3x - 9 < -(4x - 5) \quad \text{atau} \quad 3x - 9 > 4x - 5$$

$$3x - 9 < -4x + 5 \quad \text{atau} \quad 3x - 4x > 9 - 5$$

$$7x < 14 \quad \text{atau} \quad -x > 4$$

$$x < 2 \quad \text{atau} \quad x < -4$$

$$\text{sehingga : } x < 2$$

$$\text{(d)} \quad |x + 4| > 2x + 5$$

$$x + 4 < -(2x + 5) \quad \text{atau} \quad x + 4 > 2x + 5$$

$$x + 4 < -2x - 5 \quad \text{atau} \quad x - 2x > -4 + 5$$

$$3x < -9 \quad \text{atau} \quad -x > 1$$

$$x < -3 \quad \text{atau} \quad x < -1$$

$$\text{sehingga : } x < -1$$

03. Tentukanlah interval penyelesaian pertidaksamaan mutlak berikut ini dengan sifat pengkuadratan

(a) $|2x + 5| < x + 4$

(b) $|4x - 3| < 2x + 9$

Jawab

(a) $|2x + 5| < x + 4$

$$(2x + 5)^2 < (x + 4)^2$$

$$4x^2 + 20x + 25 < x^2 + 8x + 16$$

$$3x^2 + 12x + 9 < 0$$

$$x^2 + 4x + 3 < 0$$

$$(x + 1)(x + 3) < 0$$

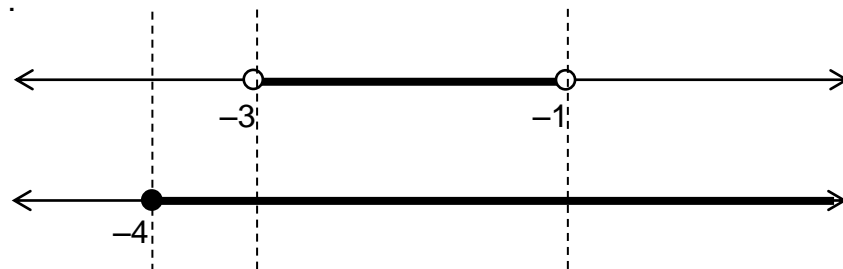
$$x_1 = -1 \text{ dan } x_2 = -3$$

$$\text{Jadi } -3 < x < -1 \text{ (1)}$$

$$\text{Syarat : } x + 4 \geq 0$$

$$x \geq -4 \text{ (2)}$$

Sehingga :



Jadi interval penyelesaiannya: $-3 < x < -1$

(b) $|4x - 3| > 2x + 9$

$$(4x - 3)^2 > (2x + 9)^2$$

$$16x^2 - 24x + 9 > 4x^2 + 36x + 81$$

$$12x^2 - 60x - 72 > 0$$

$$x^2 - 5x - 6 > 0$$

$$(x - 6)(x + 1) > 0$$

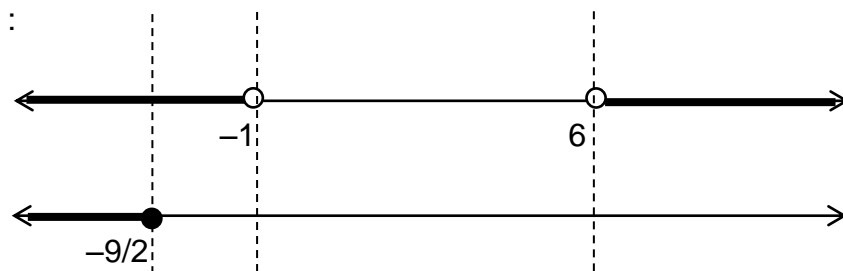
$$x_1 = 6 \text{ dan } x_2 = -1$$

$$\text{Jadi } x < -1 \text{ atau } x > 6 \text{ (1)}$$

$$\text{Atau : } 2x + 9 \leq 0$$

$$x \leq -9/2 \text{ (2)}$$

Sehingga :



Jadi interval penyelesaiannya: $-1 < x < 6$

04. Tentukanlah interval nilai x yang memenuhi pertidaksamaan berikut ini :

(a) $|4x - 1| > |3x - 6|$

(b) $|2x - 1| \leq |x - 5|$

(c) $|2x + 5| < |3x - 10|$

(d) $|x + 4| \geq |3x - 8|$

Jawab

(a) $|4x - 1| > |3x - 6|$

$$(4x - 1)^2 > (3x - 6)^2$$

$$16x^2 - 8x + 1 > 9x^2 - 36x + 36$$

$$16x^2 - 8x + 1 - 9x^2 + 36x - 36 > 0$$

$$7x^2 + 28x - 35 > 0$$

$$x^2 + 4x - 5 > 0$$

$$(x + 5)(x - 1) > 0$$

$$x_1 = -5 \text{ dan } x_2 = 1 \text{ sehingga : } x < -5 \text{ atau } x > 1$$

(b) $|2x - 1| \leq |x - 5|$

$$(2x - 1)^2 \leq (x - 5)^2$$

$$4x^2 - 4x + 1 \leq x^2 - 10x + 25$$

$$4x^2 - 4x + 1 - x^2 + 10x - 25 \leq 0$$

$$3x^2 + 6x - 24 \leq 0$$

$$x^2 + 2x - 8 \leq 0$$

$$(x + 4)(x - 2) \leq 0$$

$$x_1 = -4 \text{ dan } x_2 = 2 \text{ sehingga : } -4 \leq x \leq 2$$

(c) $|2x + 5| < |3x - 10|$

$$(2x + 5)^2 < (3x - 10)^2$$

$$4x^2 + 20x + 25 < 9x^2 - 60x + 100$$

$$4x^2 + 20x + 25 - 9x^2 + 60x - 100 < 0$$

$$-5x^2 + 80x - 75 < 0$$

$$x^2 - 16x + 15 > 0$$

$$(x - 15)(x - 1) > 0$$

$$x_1 = 1 \text{ dan } x_2 = 15 \text{ sehingga : } x < 1 \text{ atau } x > 15$$

(d) $|x + 4| \geq |3x - 8|$

$$(x + 4)^2 \geq (3x - 8)^2$$

$$x^2 + 8x + 16 \geq 9x^2 - 48x + 64$$

$$x^2 + 8x + 16 - 9x^2 + 48x - 64 \geq 0$$

$$-8x^2 + 56x - 48 \geq 0$$

$$x^2 - 7x + 6 \leq 0$$

$$(x - 6)(x - 1) \leq 0$$

$$x_1 = 6 \text{ dan } x_2 = 1 \text{ sehingga : } 1 \leq x \leq 6$$

05. Tentukanlah interval penyelesaian pertidaksamaan berikut ini :

(a) $|2x + 1| \geq |x - 2|$

(b) $|x + 2| > 2|x - 1|$

Jawab

$$\begin{aligned}
 \text{(a)} \quad & |2x + 1| \geq |x - 2| \\
 & (2x + 1)^2 \geq (x - 2)^2 \\
 & 4x^2 + 4x + 1 \geq x^2 - 4x + 4 \\
 & 3x^2 + 8x - 3 \geq 0 \\
 & (3x - 1)(x + 3) \geq 0 \\
 & x_1 = 1/3 \text{ dan } x_2 = -3 \quad \text{Jadi } x \leq -3 \text{ atau } x \geq 1/3
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{(b)} \quad & |x + 2| > 2|x - 1| \\
 & (x + 2)^2 > 4(x - 1)^2 \\
 & x^2 + 4x + 4 > 4(x^2 - 2x + 1) \\
 & x^2 + 4x + 4 > 4x^2 - 8x + 4 \\
 & 3x^2 - 12x < 0 \\
 & 3x(x - 4) < 0 \\
 & x_1 = 0 \text{ dan } x_2 = 4 \quad \text{Jadi } 0 < x < 4
 \end{aligned}$$

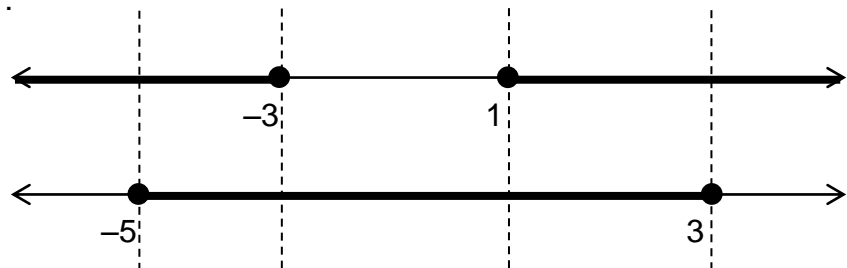
06. Tentukanlah interval penyelesaian pertidaksamaan berikut ini :

$$\text{(a)} \quad |x^2 + 2x - 9| \leq 6 \qquad \text{(b)} \quad |x^2 - 3x - 14| \geq 4$$

Jawab

$$\begin{aligned}
 \text{(a)} \quad & |x^2 + 2x - 9| \leq 6 \\
 & -6 \leq x^2 + 2x - 9 \leq 6 \\
 \text{Maka : } & x^2 + 2x - 9 \geq -6 \quad \text{dan} \quad x^2 + 2x - 9 \leq 6 \\
 & x^2 + 2x - 3 \geq 0 \quad \text{dan} \quad x^2 + 2x - 15 \leq 0 \\
 & (x + 3)(x - 1) \geq 0 \quad \text{dan} \quad (x + 5)(x - 3) \leq 0 \\
 & x_1 = -3 \text{ dan } x_2 = 1 \qquad \qquad x_1 = -5 \text{ dan } x_2 = 3 \\
 & x \leq -3 \text{ atau } x \geq 1 \quad \text{dan} \quad -5 \leq x \leq 3
 \end{aligned}$$

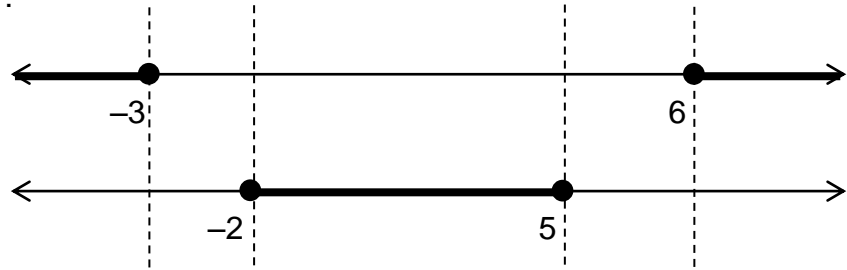
Sehingga :



Jadi interval penyelesaiannya: $-5 \leq x \leq -3$ atau $1 \leq x \leq 3$

$$\begin{aligned}
 \text{(b)} \quad & |x^2 - 3x - 14| \geq 4 \\
 & x^2 - 3x - 14 \leq -4 \quad \text{atau} \quad x^2 - 3x - 14 \geq 4 \\
 \text{Maka : } & x^2 - 3x - 14 \leq -4 \quad \text{atau} \quad x^2 - 3x - 14 \geq 4 \\
 & x^2 - 3x - 10 \leq 0 \quad \text{atau} \quad x^2 - 3x - 18 \geq 0 \\
 & (x + 2)(x - 5) \leq 0 \quad \text{atau} \quad (x + 3)(x - 6) \geq 0 \\
 & x_1 = -2 \text{ dan } x_2 = 5 \qquad \qquad x_1 = -3 \text{ dan } x_2 = 6 \\
 & -2 \leq x \leq 5 \quad \text{atau} \quad x \leq -3 \text{ atau } x \geq 6
 \end{aligned}$$

Sehingga :



Jadi interval penyelesaiannya: $x \leq -3$ atau $-2 \leq x \leq 5$ atau $x \geq 6$

07. Tentukanlah interval penyelesaian pertidaksamaan berikut ini :

(a) $|x^2 - 9x + 17| < 3$

(b) $|x^2 - 5x - 9| > 15$

Jawab

(a) $|x^2 - 9x + 17| < 3$

$$-3 < x^2 - 9x + 17 < 3$$

Maka : $x^2 - 9x + 17 > -3$ dan $x^2 - 9x + 17 < 3$

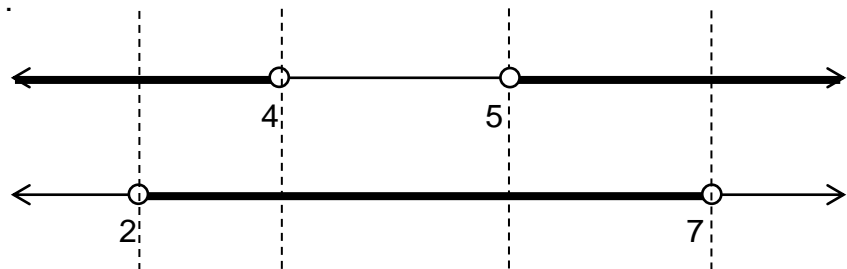
$$x^2 - 9x + 20 > 0 \quad \text{dan} \quad x^2 - 9x + 14 < 0$$

$$(x - 5)(x - 4) > 0 \quad \text{dan} \quad (x - 7)(x - 2) < 0$$

$$x_1 = 5 \text{ dan } x_2 = 4 \quad \text{dan} \quad x_1 = 7 \text{ dan } x_2 = 2$$

$$x < 4 \text{ atau } x > 5 \quad \text{dan} \quad 2 < x < 7$$

Sehingga :



Jadi interval penyelesaiannya: $2 < x < 4$ atau $5 < x < 7$

(b) $|x^2 - 5x - 9| > 15$

$$x^2 - 5x - 9 < -15 \quad \text{atau} \quad x^2 - 5x - 9 > 15$$

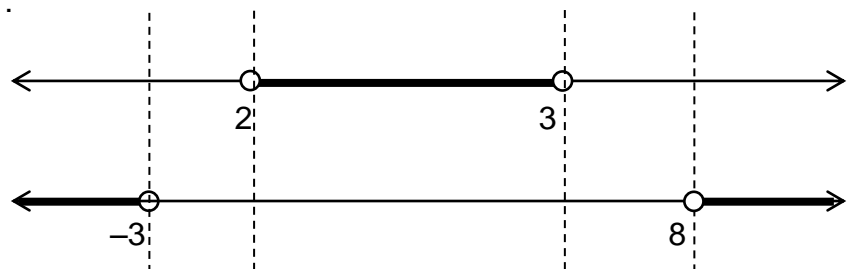
$$x^2 - 5x + 6 < 0 \quad \text{atau} \quad x^2 - 5x - 24 > 0$$

$$(x - 3)(x - 2) < 0 \quad \text{atau} \quad (x + 3)(x - 8) > 0$$

$$x_1 = 3 \text{ dan } x_2 = 2 \quad \text{dan} \quad x_1 = -3 \text{ dan } x_2 = 8$$

$$2 < x < 3 \quad \text{atau} \quad x < -3 \text{ atau } x > 8$$

Sehingga :



Jadi interval penyelesaiannya: $x < -3$ atau $2 < x < 3$ atau $x > 8$

08. Tentukanlah interval penyelesaian pertidaksamaan $|x^2 - 10x + 22| \leq 2x - 10$

Jawab

$$|x^2 - 10x + 22| \leq 2x - 10$$

$$-(2x - 10) \leq x^2 - 10x + 22 \leq (2x - 10)$$

$$-2x + 10 \leq x^2 - 10x + 22 \leq 2x - 10$$

$$\text{Maka : } x^2 - 10x + 22 \geq -2x + 10 \quad \text{dan} \quad x^2 - 10x + 22 \leq 2x - 10$$

$$x^2 - 8x + 12 \geq 0 \quad \text{dan} \quad x^2 - 12x + 32 \leq 0$$

$$(x - 6)(x - 2) \geq 0 \quad \text{dan} \quad (x - 8)(x - 4) \leq 0$$

$$x_1 = 6 \text{ dan } x_2 = 2 \quad \quad \quad x_1 = 8 \text{ dan } x_2 = 4$$

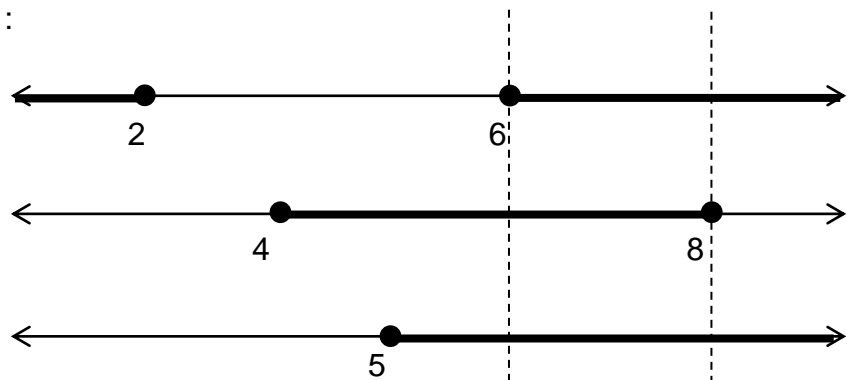
$$x \leq 2 \text{ atau } x \geq 6 \quad \quad \quad \text{dan} \quad 4 \leq x \leq 8$$

$$\text{Syarat : } 2x - 10 \geq 0$$

$$2x \geq 10$$

$$x \geq 5$$

Sehingga :



Jadi interval penyelesaiannya: $6 \leq x \leq 8$