

PERTIDAKSAMAAN SATU VARIABEL

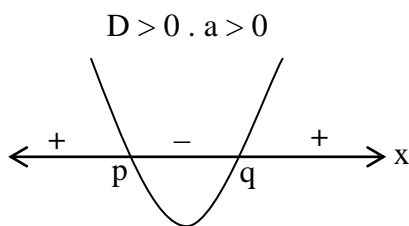
B. Pertidaksamaan Kuadrat

Bentuk Umum pertidaksamaan kuadrat adalah $ax^2 + bx + c < 0$ atau $ax^2 + bx + c > 0$ atau $ax^2 + bx + c \leq 0$ atau $ax^2 + bx + c \geq 0$. Penyelesaiannya berupa interval berhingga atau interval tak hingga dengan aturan sebagai berikut :

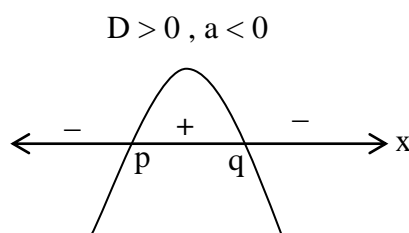
Jika p dan q adalah akar-akar dari persamaan $ax^2 + bx + c = 0$, maka p dan q merupakan batas-batas interval penyelesaian pertidaksamaan kuadrat tersebut.

Jika $D = b^2 - 4ac$ merupakan diskriminannya, maka penyelesaian pertidaksamaan kuadrat dapat dijelaskan sebagai berikut :

Untuk diskriminan positif ($D > 0$), maka akan terdapat dua titik batas interval, yakni p dan q sehingga penyelesaian pertidaksamaan kuadrat dapat dibantu dengan sketsa grafik fungsi kuadrat berikut

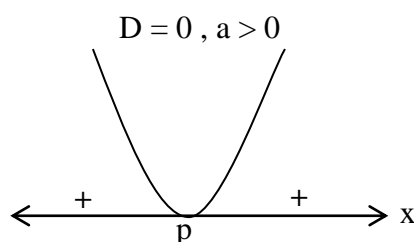


$ax^2 + bx + c < 0$ penyelesaiannya $p < x < q$
 $ax^2 + bx + c \leq 0$ penyelesaiannya $p \leq x \leq q$
 $ax^2 + bx + c > 0$ penyelesaiannya $x < p$ atau $x > q$
 $ax^2 + bx + c \geq 0$ penyelesaiannya $x \leq p$ atau $x \geq q$



$ax^2 + bx + c < 0$ penyelesaiannya $x < p$ atau $x > q$
 $ax^2 + bx + c \leq 0$ penyelesaiannya $x \leq p$ atau $x \geq q$
 $ax^2 + bx + c > 0$ penyelesaiannya $p < x < q$
 $ax^2 + bx + c \geq 0$ penyelesaiannya $p \leq x \leq q$

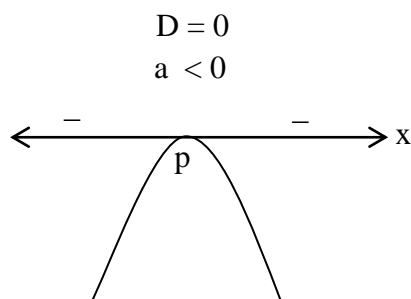
Untuk diskriminan nol ($D = 0$), maka akan terdapat satu titik batas interval, misalkan p ($p = q$) sehingga penyelesaian pertidaksamaan kuadrat dapat dibantu dengan sketsa grafik fungsi kuadrat berikut



$ax^2 + bx + c < 0$ penyelesaiannya $p < x < p$
 atau tidak ada nilai x yang memenuhi
 $ax^2 + bx + c \leq 0$ penyelesaiannya $p \leq x \leq p$
 atau $x = p$

$ax^2 + bx + c > 0$ penyelesaiannya $x < p$ atau $x > p$ atau x memenuhi semua bilangan real kecuali p

$ax^2 + bx + c \geq 0$ penyelesaiannya $x \leq p$ atau $x \geq p$ atau x memenuhi semua bilangan real



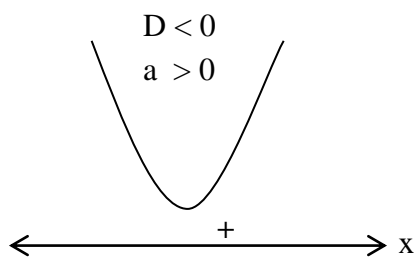
$ax^2 + bx + c < 0$ penyelesaiannya $x < p$ atau $x > p$ atau x memenuhi semua bilangan real kecuali p

$ax^2 + bx + c \leq 0$ penyelesaiannya $x \leq p$ atau $x \geq p$ atau x memenuhi semua bilangan real

$ax^2 + bx + c > 0$ penyelesaiannya $p < x < p$ atau tidak ada nilai x yang memenuhi

$ax^2 + bx + c \geq 0$ penyelesaiannya $p \leq x \leq p$ atau $x = p$

Untuk diskriminan negatif ($D < 0$), maka tidak terdapat titik batas interval, sehingga penyelesaian pertidaksamaan kuadrat dapat dibantu dengan sketsa grafik fungsi kuadrat berikut

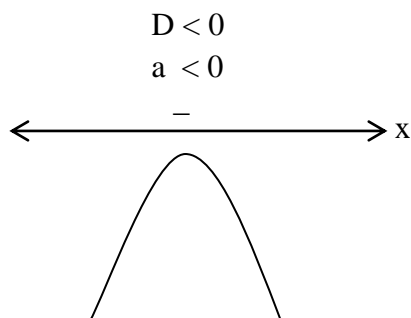


$ax^2 + bx + c < 0$ penyelesaiannya tidak ada nilai x yang memenuhi

$ax^2 + bx + c \leq 0$ penyelesaiannya tidak ada nilai x yang memenuhi

$ax^2 + bx + c > 0$ penyelesaiannya memenuhi semua bilangan real x

$ax^2 + bx + c \geq 0$ penyelesaiannya memenuhi semua bilangan real x



$ax^2 + bx + c < 0$ penyelesaiannya memenuhi semua bilangan real x

$ax^2 + bx + c \leq 0$ penyelesaiannya memenuhi semua bilangan real x

$ax^2 + bx + c > 0$ penyelesaiannya tidak ada nilai x yang memenuhi

$ax^2 + bx + c \geq 0$ penyelesaiannya tidak ada nilai x yang memenuhi

Adapun Langkah-langkah penyelesaian pertidaksamaan adalah sebagai berikut :

- (1) Ubah ruas kanan pertidaksamaan menjadi 0
- (2) Tentukan batas-batas intervalnya, yaitu akar-akar persamaan kuadratnya
- (3) Nyatakan dalam garis bilangan atau gambar grafiknya
- (4) Tentukan interval penyelesaiannya

Untuk lebih jelasnya akan diuraikan dalam contoh soal berikut:

01. Tentukanlah interval penyelesaian pertidaksamaan berikut ini :

(a) $x^2 - x - 12 < 0$

(b) $x^2 - 9 \geq 0$

(c) $-3x^2 + 9x + 30 > 0$

(d) $10x - x^2 \leq 24$

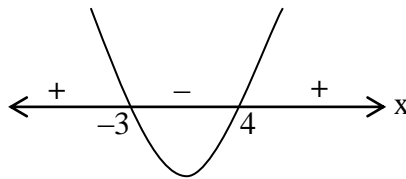
Jawab

(a) $x^2 - x - 12 < 0$

$(x + 3)(x - 4) < 0$

$x_1 = -3$ dan $x_2 = 4$

$-3 < x < 4$

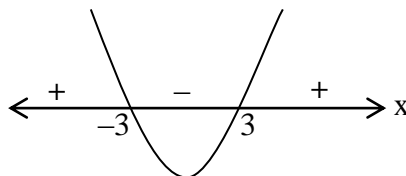


(b) $x^2 - 9 \geq 0$

$(x + 3)(x - 3) \geq 0$

$x_1 = -3$ dan $x_2 = 3$

$x \leq -3$ atau $x \geq 3$



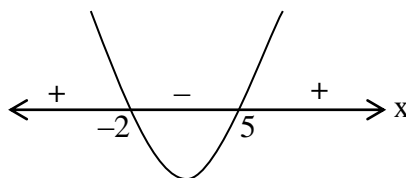
(c) $-3x^2 + 9x + 30 > 0$

$x^2 - 3x - 10 < 0$

$(x + 2)(x - 5) < 0$

$x_1 = -2$ dan $x_2 = 5$

$-2 < x < 5$

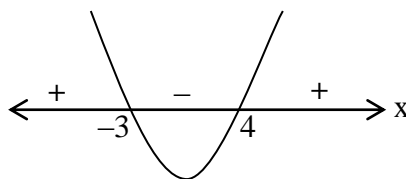


(d) $x^2 - x - 12 < 0$

$(x + 3)(x - 4) < 0$

$x_1 = -3$ dan $x_2 = 4$

$-3 < x < 4$



02. Tentukanlah interval penyelesaian pertidaksamaan berikut ini :

(a) $x^2 - 2x + 8 > 0$

(b) $15x - x^2 - 18 \geq x^2 + 3x$

Jawab

(a) $x^2 - 2x + 8 > 0$

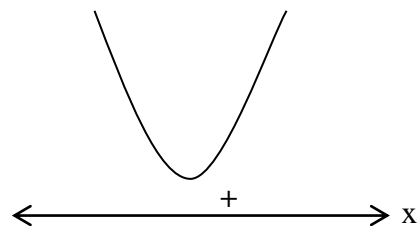
$D = (-2)^2 - 4(1)(8)$

$D = -28 < 0$

Tidak ada batas interval

Jadi

x memenuhi semua bilangan real



(b) $15x - x^2 - 18 \geq x^2 + 3x$

$15x - x^2 - 18 - x^2 - 3x \geq 0$

$-2x^2 - 12x - 18 \geq 0$

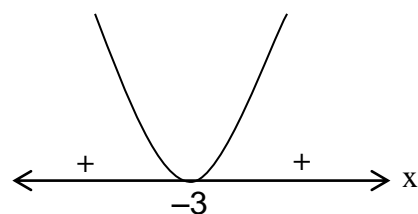
$x^2 + 6x + 9 \leq 0$

$(x + 3)(x + 3) \leq 0$

$x = -3$

$-3 \leq x \leq -3$

Atau nilai yang memenuhi hanya untuk $x = -3$



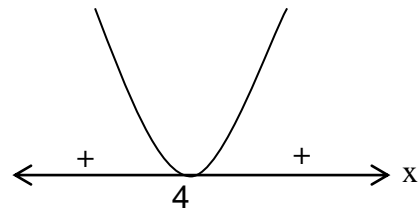
03. Tentukanlah interval penyelesaian pertidaksamaan berikut ini :

(a) $x^2 - 8x + 16 > 0$

(b) $x^2 + 10x + 25 < 0$

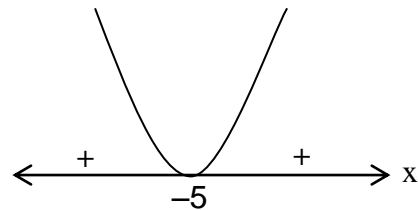
Jawab

(a) $x^2 - 8x + 16 > 0$
 $(x - 4)(x - 4) > 0$
 $x = 4$
 $x < 4$ atau $x > 4$



Atau nilai x memenuhi untuk semua bilangan real kecuali 4

(b) $x^2 + 10x + 25 < 0$
 $(x + 5)(x + 5) > 0$
 $x = -5$
 $-5 < x < -5$
 Atau tidak ada nilai x yang memenuhi



4. Sebuah perusahaan sepatu memproduksi dan menjual berbagai model sepatu. Untuk satu model sepatu tertentu diperkirakan dijual seharga a rupiah. Jika dalam satu minggu dikeluarkan biaya sebesar M rupiah dan pendapatan yang diterima P rupiah serta dirumuskan $M = 2.000.000 - 40.000a$ dan $P = 20.000a - 400a^2$ maka berapa batas harga sepatu persatuan harus dijual agar memperoleh keuntungan ?

Jawab

Agar mendapat keuntungan maka :

$P > M$

$20000a - 400a^2 > 2000000 - 40000a$

$20000a - 400a^2 - 2000000 + 40000a > 0$

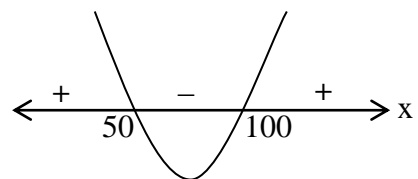
$-400a^2 + 60000a - 2000000 > 0$

$a^2 - 150a + 5000 < 0$

$(a - 100)(a - 50) < 0$

Batas interval $a_1 = 100$ dan $a_2 = 50$

Jadi interval harga sepatu adalah : $50 < a < 100$



5. Kiper Kevin menendang bola yang sudah ditangkapnya. Tinggi bola h, dalam meter, t detik setelah ditendang membentuk persamaan $h = -3t^2 + 18t$. Kapan bola mencapai ketinggian lebih dari 24 m?

Jawab

$h > 24$

$-3t^2 + 18t > 24$

$-3t^2 + 18t - 24 > 0$

$3t^2 - 18t + 24 < 0$

$t^2 - 6t + 8 < 0$

$(t - 4)(t - 2) < 0$ $t_1 = 4$ dan $t_2 = 8$

maka $4 < t < 8$

Jadi bola mencapai ketinggian lebih dari 24 m pada waktu antara 4 sampai 8 detik