

RUMUS-RUMUS TRIGONOMETRI

E. Persamaan Trigonometri

Persamaan trigonometri adalah persamaan yang didalamnya memuat perbandingan trigonometri. Persamaan trigonometri ini terbagi dua bentuk, yakni berbentuk kalimat terbuka dan berbentuk identitas. Menyelesaikan persamaan trigonometri dalam bentuk kalimat terbuka, berarti menentukan nilai variabel yang terdapat dalam persamaan tersebut sehingga persamaan itu menjadi benar.

Terdapat tiga macam rumus perioda yang dipakai dalam menyelesaikan persamaan trigonometri bentuk ini, yaitu :

$$(1) \sin x = \sin \alpha \quad \text{maka} \quad x = \alpha + k.360^{\circ} \quad \text{dan} \quad x = (180 - \alpha) + k.360^{\circ}$$

$$(2) \cos x = \cos \alpha \quad \text{maka} \quad x = \alpha + k.360^{\circ} \quad \text{dan} \quad x = -\alpha + k.360^{\circ}$$

$$(3) \tan x = \tan \alpha \quad \text{maka} \quad x = \alpha + k.180^{\circ}$$

dimana k adalah bilangan bulat

Untuk lebih jelasnya, ikutilah contoh soal berikut ini :

01. Tentukanlah nilai x yang memenuhi persamaan $\cos 2x = 1/2$ dalam interval $0^{\circ} < x \leq 360^{\circ}$

Jawab

$$\cos 2x = 1/2$$

$$\cos 2x = \cos 60^{\circ}$$

$$\text{maka } 2x = 60^{\circ} + k.360^{\circ}$$

$$x = 30^{\circ} + k.180^{\circ}$$

$$\text{Untuk } k = 0 \text{ maka } x = 30^{\circ} + (0)180^{\circ} = 30^{\circ}$$

$$\text{Untuk } k = 1 \text{ maka } x = 30^{\circ} + (1)180^{\circ} = 210^{\circ}$$

$$2x = -60^{\circ} + k.360^{\circ}$$

$$x = -30^{\circ} + k.180^{\circ}$$

$$\text{Untuk } k = 1 \text{ maka } x = -30^{\circ} + (1)180^{\circ} = 150^{\circ}$$

$$\text{Untuk } k = 2 \text{ maka } x = -30^{\circ} + (2)180^{\circ} = 330^{\circ}$$

$$\text{Jadi } H = \{ 30^{\circ}, 150^{\circ}, 210^{\circ}, 330^{\circ} \}$$

02. Tentukanlah nilai x yang memenuhi persamaan $2.\sin 3x = -\sqrt{2}$ dalam interval $0^{\circ} < x \leq 360^{\circ}$

Jawab

$$2.\sin 3x = -\sqrt{2}$$

$$\sin 3x = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$$

$$\sin 3x = \sin 225^{\circ}$$

$$\text{maka } 3x = 225^{\circ} + k \cdot 360^{\circ}$$

$$x = 75^{\circ} + k \cdot 120^{\circ}$$

$$\text{Untuk } k = 0 \text{ maka } x = 75^{\circ} + (0)120^{\circ} = 75^{\circ}$$

$$\text{Untuk } k = 1 \text{ maka } x = 75^{\circ} + (1)120^{\circ} = 195^{\circ}$$

$$\text{Untuk } k = 2 \text{ maka } x = 75^{\circ} + (2)120^{\circ} = 315^{\circ}$$

$$3x = (180 - 225)^{\circ} + k \cdot 360^{\circ}$$

$$3x = -45^{\circ} + k \cdot 360^{\circ}$$

$$x = -15^{\circ} + k \cdot 120^{\circ}$$

$$\text{Untuk } k = 1 \text{ maka } x = -15^{\circ} + (1)120^{\circ} = 105^{\circ}$$

$$\text{Untuk } k = 2 \text{ maka } x = -15^{\circ} + (2)120^{\circ} = 225^{\circ}$$

$$\text{Untuk } k = 3 \text{ maka } x = -15^{\circ} + (3)120^{\circ} = 345^{\circ}$$

$$\text{Jadi } H = \{ 75^{\circ}, 105^{\circ}, 195^{\circ}, 225^{\circ}, 315^{\circ}, 345^{\circ} \}$$

03. Tentukanlah nilai x yang memenuhi persamaan $\cos(2x + 60^{\circ}) = -1/2$ dalam interval $0^{\circ} < x \leq 360^{\circ}$

Jawab

$$\cos(2x + 60^{\circ}) = -1/2$$

$$\cos(2x + 60^{\circ}) = \cos 120^{\circ}$$

$$\text{maka } 2x + 60^{\circ} = 120^{\circ} + k \cdot 360^{\circ}$$

$$2x = 60^{\circ} + k \cdot 360^{\circ}$$

$$x = 30^{\circ} + k \cdot 180^{\circ}$$

$$\text{Untuk } k = 0 \text{ maka } x = 30^{\circ} + (0)180^{\circ} = 30^{\circ}$$

$$\text{Untuk } k = 1 \text{ maka } x = 30^{\circ} + (1)180^{\circ} = 210^{\circ}$$

$$2x + 60^{\circ} = -120^{\circ} + k \cdot 360^{\circ}$$

$$2x = -180^{\circ} + k \cdot 360^{\circ}$$

$$x = -90^{\circ} + k \cdot 180^{\circ}$$

$$\text{Untuk } k = 1 \text{ maka } x = -90^{\circ} + (1)180^{\circ} = 90^{\circ}$$

$$\text{Untuk } k = 2 \text{ maka } x = -90^{\circ} + (2)180^{\circ} = 270^{\circ}$$

$$\text{Jadi } H = \{ 30^{\circ}, 90^{\circ}, 210^{\circ}, 270^{\circ} \}$$

04. Tentukanlah nilai x yang memenuhi $\sqrt{3} + 3 \cdot \tan(2x - 30^{\circ}) = 0$ dalam interval $0^{\circ} < x \leq 360^{\circ}$

Jawab

$$\sqrt{3} + 3 \cdot \tan(2x - 30^{\circ}) = 0$$

$$3 \cdot \tan(2x - 30^{\circ}) = -\sqrt{3}$$

$$\tan(2x - 30^{\circ}) = -\frac{1}{3}\sqrt{3}$$

$$\tan(2x - 30^{\circ}) = \tan 30^{\circ}$$

$$\begin{aligned} \text{maka } 2x - 30^0 &= 30^0 + k.180^0 \\ 2x &= 60^0 + k.180^0 \\ x &= 30^0 + k.90^0 \\ \text{Untuk } k = 0 &\text{ maka } x = 30^0 + (0)90^0 = 30^0 \\ \text{Untuk } k = 1 &\text{ maka } x = 30^0 + (1)90^0 = 120^0 \\ \text{Untuk } k = 2 &\text{ maka } x = 30^0 + (2)90^0 = 210^0 \\ \text{Untuk } k = 3 &\text{ maka } x = 30^0 + (3)90^0 = 300^0 \end{aligned}$$

$$\text{Jadi } H = \{ 30^0, 120^0, 210^0, 300^0 \}$$

05. Tentukanlah nilai x yang memenuhi $2 + \sqrt{12} \sin (2x + 30^0) = 5$ dalam interval $0^0 < x \leq 360^0$

Jawab

$$2 + \sqrt{12} \sin (2x + 30^0) = 5$$

$$\sqrt{12} \sin (2x + 30^0) = 3$$

$$2\sqrt{3} \sin (2x + 30^0) = 3$$

$$\sin (2x + 30^0) = \frac{3}{2\sqrt{3}}$$

$$\sin (2x + 30^0) = \frac{3}{2\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$$

$$\sin (2x + 30^0) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$$

$$\sin (2x + 30^0) = \sin 60^0$$

$$\text{maka } 2x + 30^0 = 60^0 + k.360^0$$

$$2x = 30^0 + k.360^0$$

$$x = 15^0 + k.180^0$$

$$\text{Untuk } k = 0 \text{ maka } x = 15^0 + (0)180^0 = 15^0$$

$$\text{Untuk } k = 1 \text{ maka } x = 15^0 + (1)180^0 = 195^0$$

$$2x + 30^0 = (180 - 60)^0 + k.360^0$$

$$2x + 30^0 = 120^0 + k.360^0$$

$$2x = 90^0 + k.360^0$$

$$x = 45^0 + k.180^0$$

$$\text{Untuk } k = 0 \text{ maka } x = 45^0 + (0)180^0 = 45^0$$

$$\text{Untuk } k = 1 \text{ maka } x = 45^0 + (1)180^0 = 225^0$$

$$\text{Jadi } H = \{ 30^0, 90^0, 210^0, 270^0 \}$$

06. Tentukanlah nilai x yang memenuhi persamaan $\tan^2 x - 3 = 0$ dalam interval $0^0 < x \leq 360^0$

Jawab

$$\tan^2 x - 3 = 0$$

$$(\tan x - \sqrt{3})(\tan x + \sqrt{3}) = 0$$

$$\tan x = \sqrt{3} \quad \text{dan} \quad \tan x = -\sqrt{3}$$

$$\begin{aligned} \text{maka } \tan x &= \sqrt{3} \\ x &= 60^{\circ} \\ x &= 240^{\circ} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tan x &= -\sqrt{3} \\ x &= 120^{\circ} \\ x &= 300^{\circ} \end{aligned}$$

$$\text{Jadi } H = \{60^{\circ}, 120^{\circ}, 240^{\circ}, 300^{\circ}\}$$

07. Tentukanlah nilai x yang memenuhi persamaan $2.\cos^2x + \cos x - 1 = 0$ dalam interval $0^{\circ} < x \leq 360^{\circ}$

Jawab

$$2.\cos^2x + \cos x - 1 = 0 \quad \text{misalkan } \cos x = P$$

$$2P^2 + P - 1 = 0$$

$$(2P - 1)(P + 1) = 0$$

$$P = 1/2 \quad \text{dan} \quad P = -1$$

$$\text{maka } \cos x = 1/2$$

$$x = 60^{\circ} \quad \text{dan} \quad x = 300^{\circ}$$

$$\cos x = -1$$

$$x = 180^{\circ}$$

$$\text{Jadi } H = \{60^{\circ}, 180^{\circ}, 300^{\circ}\}$$