

# LINGKARAN

## A. Persamaan-Persamaan Lingkaran

Lingkaran adalah tempat kedudukan titik-titik yang berjarak sama terhadap sebuah titik tertentu yang digambarkan dalam grafik cartesius.

Jarak yang sama itu disebut jari-jari lingkaran dan titik tertentu itu dinamakan pusat lingkaran

Menurut rumus, jarak dua titik  $A(x_A, y_A)$  dan  $B(x_B, y_B)$  dapat ditentukan dengan

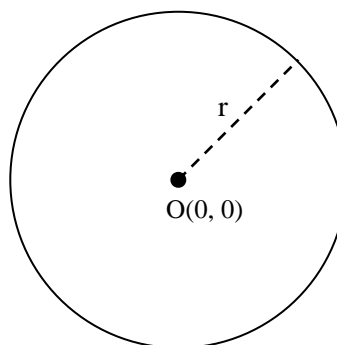
$$\text{rumus : } AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} \dots\dots\dots(1)$$

Jika titik pada lingkaran dimisalkan  $M(x, y)$  dan pusat lingkarannya di  $O(0, 0)$ , maka Jari-jari =  $OM$

$$r = \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2}$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$r^2 = x^2 + y^2$$



Jadi persamaan lingkaran yang berpusat di  $O(0, 0)$  dan berjari-jari  $r$  adalah  $x^2 + y^2 = r^2$  ..... (2)

Untuk lebih jelasnya pelajarailah contoh soal berikut ini

01 Tentukanlah persamaan lingkaran yang berpusat di  $O(0, 0)$  dan berjari-jari  $4\sqrt{2}$

Jawab

$$x^2 + y^2 = r^2$$

$$x^2 + y^2 = (4\sqrt{2})^2$$

$$x^2 + y^2 = 32$$

02. Tentukanlah persamaan lingkaran yang berpusat di  $O(0, 0)$  dan melalui  $(-4, 3)$

Jawab

persamaan lingkaran  $x^2 + y^2 = r^2$

Karena melalui  $(-4, 3)$  maka :  $(-4)^2 + (3)^2 = r^2$

$$16 + 9 = r^2$$

$$r^2 = 25$$

Sehingga persamaan lingkarannya :  $x^2 + y^2 = 25$

03. Tentukanlah persamaan lingkaran yang mempunyai diameter AB dimana A(-2, 4) dan B(2, -4)

Jawab

persamaan lingkaran  $x^2 + y^2 = r^2$

Titik tengah AB adalah pusat lingkaran

Sehingga pusat :  $(\frac{-2+2}{2}, \frac{4+(-4)}{2})$

Pusat (0, 0)

Jari jari lingkaran =  $\frac{1}{2} AB$

$$r = \frac{1}{2} \sqrt{(2 - (-2))^2 + (-4 - 4)^2}$$

$$r = \frac{1}{2} \sqrt{4^2 + 8^2}$$

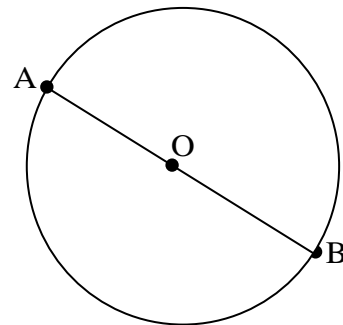
$$r = \frac{1}{2} \sqrt{80}$$

$$r = \frac{1}{2} (4\sqrt{5})$$

$$r = 2\sqrt{5}$$

Jadi persamaan lingkaran :  $x^2 + y^2 = (2\sqrt{5})^2$

$$x^2 + y^2 = 20$$



Dengan cara yang sama, untuk pusat lingkaran di P(a, b) maka didapat ;

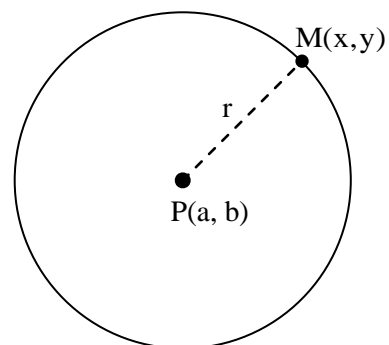
Jari-jari = PM

$$r = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$$

$$r^2 = (x-a)^2 + (y-b)^2$$

Jadi persamaan lingkaran yang berpusat di P(a, b) dan berjari-jari r adalah

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2 \dots\dots\dots (3)$$



Jika rumus (3) diuraikan maka akan diperoleh bentuk

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

$$x^2 - 2ax + a^2 + y^2 - 2by + b^2 = r^2$$

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - r^2 = 0$$

Jika bentuk terakhir ini dianalogikan ke dalam bentuk  $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$ , maka akan diperoleh :  $-2a = A$  sehingga  $a = -\frac{1}{2}A$

$$-2b = B \quad \text{sehingga} \quad b = -\frac{1}{2}B$$

$$a^2 + b^2 - r^2 = C \quad \text{maka} \quad r = \sqrt{\frac{A^2}{4} + \frac{B^2}{4} - C}$$

Jadi persamaan umum lingkaran adalah

$$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0 \quad \dots\dots\dots (4)$$

dimana pusat lingkaran di  $P(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2})$  dan jari-jari  $r = \sqrt{\frac{A^2}{4} + \frac{B^2}{4} - C}$

Untuk lebih jelasnya pelajarailah contoh soal berikut ini

04. Tentukanlah bentuk umum lingkaran yang berpusat di  $P(2, -3)$  dan berjari-jari 5

Jawab

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

$$(x - 2)^2 + (y - [-3])^2 = 5^2$$

$$(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 25$$

Jika bentuk ini diuraikan menjadi bentuk umum, akan diperoleh

$$x^2 - 4x + 4 + y^2 + 6y + 9 = 25$$

$$x^2 + y^2 - 4x + 6y - 12 = 0$$

05. Tentukanlah pusat dan jari-jari lingkaran  $x^2 + y^2 + 6x - 10y + 18 = 0$

Jawab

Pusat  $P(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2})$

$$P(-\frac{6}{2}, -\frac{(-10)}{2})$$

$$P(-3, 5)$$

Jari Jari :  $r = \sqrt{\frac{A^2}{4} + \frac{B^2}{4} - C}$

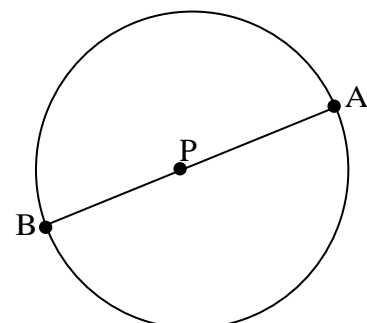
$$r = \sqrt{\frac{6^2}{4} + \frac{(-10)^2}{4} - 18} = \sqrt{9 + 25 - 18} = \sqrt{16} = 4$$

06. Jika diameter lingkaran adalah ruas garis AB dimana  $A(2, 3)$  dan  $B(-6, -1)$  maka tentukanlah persamaan lingkaran tersebut

Jawab

persamaan lingkaran  $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$

Titik tengah AB adalah pusat lingkaran



$$\text{Sehingga pusat : } \left( \frac{2+(-6)}{2}, \frac{3+(-1)}{2} \right)$$

$$\text{Pusat } (-2, 1)$$

$$\text{Jari jari lingkaran} = \frac{1}{2} AB$$

$$r = \frac{1}{2} \sqrt{(2-(-6))^2 + (3-(-1))^2}$$

$$r = \frac{1}{2} \sqrt{8^2 + 4^2}$$

$$r = \frac{1}{2} \sqrt{80}$$

$$r = \frac{1}{2} (4\sqrt{5})$$

$$r = 2\sqrt{5}$$

$$\text{Jadi persamaan lingkaran : } (x - (-2))^2 + (y - 1)^2 = (2\sqrt{5})^2$$

$$(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 20$$

$$x^2 + 4x + 16 + y^2 - 2y + 1 = 20$$

$$x^2 + y^2 + 4x - 2y - 15 = 0$$

07. Diketahui  $A(x_1, y_1)$  dan  $B(x_2, y_2)$ . Buktikanlah bahwa persamaan lingkaran yang diameternya AB adalah  $(x - x_1)(x - x_2) + (y - y_1)(y - y_2) = 0$

Jawab

$$\text{Diameter lingkaran} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$r = \frac{1}{2} \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$\text{Pusat lingkaran } P\left(\frac{1}{2}(x_1 + x_2), \frac{1}{2}(y_1 + y_2)\right)$$

Maka

$$\left(x - \frac{1}{2}(x_1 + x_2)\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}(y_1 + y_2)\right)^2 = \left[\frac{1}{2} \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}\right]^2$$

$$(2x - x_1 - x_2)^2 + (2y - y_1 - y_2)^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

$$([x - x_1] + [x - x_2])^2 + ([y - y_1] + [y - y_2])^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

$$x^2 - 2x_1x + x_1^2 + 2x^2 - 2x_1x - 2x_2x + 2x_1x_2 + x^2 - 2x_2x + x_2^2 + y^2 - 2y_1y + y_1^2 + 2y^2$$

$$- 2y_1y + 2y_1y_2 + y^2 - 2y_2y + y_2^2 = (x_2^2 - 2x_1x_2 + x_1^2 + y_2^2 - 2y_1y_2 + y_2^2)$$

$$4x^2 - 4x_1x - 4x_2x - 4x_1x_2 + 4y^2 - 4y_1y - 4y_2y - 4y_1y_2 = 0$$

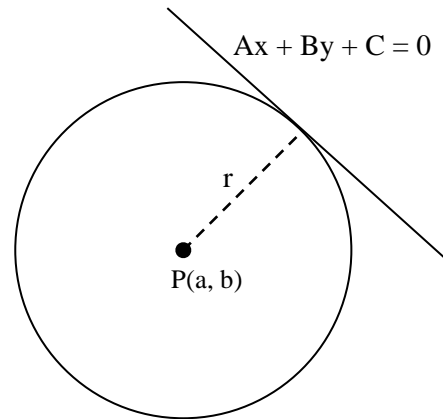
$$x^2 - x_1x - x_2x - x_1x_2 + y^2 - y_1y - y_2y - y_1y_2 = 0$$

$$x(x - x_1) - x_2(x - x_1) + y(y - y_1) - y_2(y - y_1) = 0$$

$$(x - x_1)(x - x_2) + (y - y_1)(y - y_2) = 0$$

Jika suatu lingkaran berpusat di  $P(a, b)$  dan menyinggung garis  $Ax + By + C = 0$ , maka persamaannya adalah :  $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$

Dimana  $r = \left| \frac{A(a) + B(b) + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right|$



Sebagai contoh suatu lingkaran yang berpusat di  $P(3, 2)$  dan menyinggung garis  $6x + 8y + 26 = 0$  mempunyai jari-jari :

$$r = \left| \frac{6(3) + 8(2) + 26}{\sqrt{6^2 + 8^2}} \right| = \left| \frac{50}{\sqrt{100}} \right| = 5$$

Persamaan lingkarannya adalah ;  $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 25$