

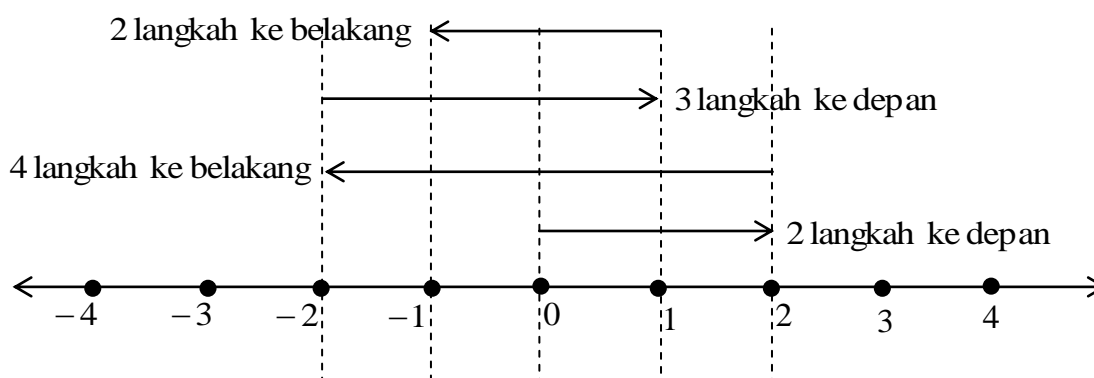
PERSAMAAN DAN PERTIDAKSAMAAN NILAI MUTLAK

A. Persamaan Nilai Mutlak

Untuk memahami konsep nilai mutlak, akan diilustrasikan dengan cerita berikut ini: Seorang anak pramuka sedang latihan baris berbaris. Dari posisi diam, si anak diminta maju 2 langkah ke depan, kemudian 4 langkah ke belakang. Dilanjutkan dengan 3 langkah ke depan dan akhirnya 2 langkah ke belakang. Dari cerita di atas dapat diambil permasalahan :

- Berapakah banyaknya langkah anak pramuka tersebut dari pertama sampai terakhir ?
- Dimanakah posisi terakhir anak pramuka tersebut, jika diukur dari posisi diam? (berapa langkah ke depan atau berapa langkah ke belakang)

Untuk menjawab permasalahan diatas, akan diberikan gambar garis bilangan berikut:



Dari gambar di atas, kita misalkan bahwa $x = 0$ adalah posisi diam (awal) si anak. Anak panah ke kanan menunjukkan arah langkah ke depan (bernilai positif) dan anak panah ke kiri menunjukkan arah langkah ke belakang (bernilai negatif). Sehingga permasalahan di atas dapat dijawab sebagai berikut :

- Banyaknya langkah anak pramuka tersebut dari pertama sampai terakhir adalah Bentuk penjumlahan $2 + 4 + 3 + 2 = 11$ langkah. Bentuk penjumlahan ini merupakan penjumlahan tanpa memperhatikan arah ke depan (positif) dan ke belakang (negatif)
- Dari gambar diatas, dapat dilihat bahwa posisi terakhir anak pramuka tersebut, jika diukur dari posisi diam adalah 1 langkah ke belakang ($x = -1$). Hasil ini didapat dari bentuk penjumlahan $2 + (-4) + 3 + (-1) = -1$. Bentuk penjumlahan ini merupakan

penjumlahan dengan memperhatikan arah ke depan (positif) dan ke belakang (negatif).

Ilustrasi dari penyelesaian soal (a) di atas merupakan dasar dari konsep nilai mutlak. Dimana *Nilai mutlak suatu bilangan real x merupakan jarak antara bilangan itu dengan nol pada garis bilangan*. Dan dilambangkan dengan $|x|$. Secara formal nilai mutlak didefinisikan :

<p>Misalkan x bilangan real, maka $x = \begin{cases} x & \text{Jika } x \geq 0 \\ -x & \text{Jika } x < 0 \end{cases}$</p>

Dari konsep diatas diperoleh : $|-3| = 3$, $|-15| = 15$, $|6| = 6$, $|10| = 10$ dan seterusnya.

Untuk lebih memahami pertidaksamaan nilai mutlak, perhatikan contoh berikut :

01. Tentukanlah nilai

- | | |
|------------------------------|---------------------------|
| (a) $ -4 + 5 - -3 $ | (b) $6 - -2 + -5 + 1$ |
| (c) $ 4 + 2 - 3 - 8 $ | (d) $3 \times 2 - 6 $ |
| (e) $ 2 - 5 \times 4 + 1 $ | |

Jawab

- (a) $|-4| + |5| - |-3| = 4 + 5 - 3 = 6$
 (b) $6 - |-2| + |-5| + 1 = 6 - 2 + 5 + 1 = 10$
 (c) $|4 + 2| - |3 - 8| = |6| - |-5| = 6 - 5 = 1$
 (d) $3 \times |2 - 6| = 3 \times |-4| = 3 \times 4 = 12$
 (e) $|2 - 5| \times |4 + 1| = |-3| \times |5| = 3 \times 5 = 15$

02. Tentukanlah nilai

- | | |
|-----------------------------|--------------------------------|
| (a) $ 4 - -7 $ | (b) $ -9 + -2 $ |
| (c) $ 3 - 2 - 6 $ | (d) $ -4 + -3 - 2 + -6 $ |
| (e) $ -5 + 4 + 2 - -3 $ | |

Jawab

- (a) $|4 - |-7|| = |4 - 7| = |-3| = 3$
 (b) $|-9 + |-2|| = |-9 + 2| = |-7| = 7$
 (c) $|3 - |2 - 6|| = |3 - 4| = |-1| = 1$
 (d) $|-4 + |-3|| - |2 + |-6|| = |-4 + 3| - |2 + 6| = 1 - 8 = -7$
 (e) $|-5 + 4| + |2 - |-3|| = |-1| + |-1| = 1 + 1 = 2$

03. Manakah diantara operasi berikut ini yang bernilai benar

- | | |
|---------------------------|-------------------------------------|
| (a) $ a + b = a + b $ | (b) $ a \times b = a \times b $ |
| (c) $ a - b = a - b $ | |

Jawab

- (a) Salah
 (b) Benar
 (c) Salah

04. Untuk $x = -3$, maka tentukanlah nilai $|x^2 + 6x + 5|$

Jawab

$$\begin{aligned}|x^2 + 6x + 5| &= |(-3)^2 + 6(-3) + 5| \\ &= |9 - 18 + 5| \\ &= |-4| \\ &= 4\end{aligned}$$

05. Untuk $x = 2$, maka tentukanlah nilai $4|2 - 6x| + |3x - 8|$

Jawab

$$\begin{aligned}4|2 - 6x| + |3x - 8| &= 4|2 - 6(2)| + |3(2) - 8| \\ &= 4|-10| + |-2| \\ &= 40 + 2 \\ &= 42\end{aligned}$$

06. Untuk $x = -2$, maka tentukanlah nilai $|x^2 - 6x| - |4x + 5|$

Jawab

$$\begin{aligned}|x^2 - 6x| - |4x + 5| &= |(-2)^2 - 6(-2)| - |4(-2) + 5| \\ &= |4 + 12| - |-8 + 5| \\ &= 16 + 3 \\ &= 19\end{aligned}$$

07. Seekor bekicot akan menaiki tiang bendera dimulai awal tanggal 5 Agustus. Jika pada tanggal ganjil bekicot itu bergerak naik setinggi 6 m, dan pada tanggal genap ia turun sejauh 4 m, maka ia akan tiba dipuncak tiang bendera tepat pada akhir tanggal 17 Agustus.

(a) Berapakah tinggi tiang bendera

(b) Berapakah jauh perjalanan bekicot itu?

Jawab

$$\begin{aligned}\text{(a) Tinggi tiang bendera} &= 6 - 4 + 6 - 4 + 6 - 4 + 6 - 4 + 6 - 4 + 6 - 4 + 6 \\ &= 18 \text{ m}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{(b) jauh perjalanan bekicot itu} &= 6 + |-4| + 6 + |-4| + 6 + |-4| + 6 + |-4| + 6 \\ &\quad + |-4| + 6 + |-4| + 6 \\ &= 66 \text{ m}\end{aligned}$$

Untuk menyelesaikan persamaan nilai mutlak, dapat menggunakan definisi nilai mutlak atau menggunakan sifat-sifat nilai mutlak, yakni sebagai berikut :

01. (a) Jika $|f(x)| = a$ maka $f(x) = a$ atau $f(x) = -a$ (definisi nilai mutlak)

(b) Jika $|f(x)| = a$ maka $f^2(x) = a^2$ (sifat nilai mutlak)

02. (a) Jika $|f(x)| = |g(x)|$ maka $f(x) = g(x)$ atau $f(x) = -g(x)$ (definisi nilai mutlak)

(b) Jika $|f(x)| = |g(x)|$ maka $f^2(x) = g^2(x)$ (sifat nilai mutlak)

03. (a) Jika $|f(x)| = g(x)$ maka $f(x) = g(x)$ atau $f(x) = -g(x)$ (definisi nilai mutlak)

(b) Jika $|f(x)| = g(x)$ maka $f^2(x) = g^2(x)$ (sifat nilai mutlak)

Catatan: Jika x_1 adalah penyelesaiannya maka $g(x_1) \geq 0$

Untuk lebih memahami pertidaksamaan nilai mutlak, perhatikan contoh berikut :

01. Tentukan nilai x yang memenuhi persamaan berikut :

(a) $|2x - 5| = 3$

(b) $|3 - 2x| = 7$

Jawab

(a) Cara 1

$$\begin{array}{l} 2x - 5 = 3 \quad \text{atau} \quad 2x - 5 = -3 \\ 2x = 3 + 5 \qquad \qquad 2x = -3 + 5 \\ 2x = 8 \qquad \qquad \qquad 2x = 2 \\ x = 4 \qquad \qquad \qquad \quad x = 1 \end{array}$$

Cara 2

$$\begin{array}{l} (2x - 5)^2 = 3^2 \\ 4x^2 - 20x + 25 = 9 \\ 4x^2 - 20x + 16 = 0 \\ x^2 - 5x + 4 = 0 \\ (x - 4)(x - 1) = 0 \\ \text{Jadi } x = 1 \text{ dan } x = 4 \end{array}$$

(b) Cara 1

$$\begin{array}{l} 3 - 2x = 7 \quad \text{atau} \quad 3 - 2x = -7 \\ -2x = 7 - 3 \qquad \qquad -2x = -7 - 3 \\ -2x = 4 \qquad \qquad \qquad -2x = -10 \\ x = -2 \qquad \qquad \qquad \quad x = 5 \end{array}$$

Cara 2

$$\begin{array}{l} (3 - 2x)^2 = 7^2 \\ 9 - 12x + 4x^2 = 49 \\ 4x^2 - 12x - 40 = 0 \\ x^2 - 3x - 10 = 0 \\ (x - 5)(x + 2) = 0 \\ \text{Jadi } x_1 = 5 \text{ dan } x_2 = -2 \end{array}$$

02. Tentukan nilai x yang memenuhi persamaan berikut :

(a) $|2x + 4| = |x - 1|$

(b) $|3x + 4| = |2x - 1|$

Jawab

(a) Cara 1

$$\begin{array}{l} 2x + 4 = x - 1 \quad \text{atau} \quad 2x + 4 = -(x - 1) \\ 2x - x = -4 - 1 \qquad \qquad 2x + 4 = -x + 1 \\ x = -5 \qquad \qquad \qquad \quad 2x + x = -4 + 1 \\ \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \quad 3x = -3 \\ \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \quad x = -1 \end{array}$$

Jadi $x_1 = 5/3$ dan $x_2 = 3$

Cara 2

$$\begin{array}{l} (2x + 4)^2 = (x - 1)^2 \\ 4x^2 + 16x + 16 = x^2 - 2x + 1 \\ 3x^2 + 18x + 15 = 0 \\ x^2 + 6x + 5 = 0 \\ (x + 5)(x + 1) = 0 \\ \text{Jadi } x_1 = -5 \text{ dan } x_2 = -1 \end{array}$$

(b) Cara 1

$$\begin{array}{l} 3x + 4 = 2x - 1 \quad \text{atau} \quad 3x + 4 = -(2x - 1) \\ 3x - 2x = -4 - 1 \qquad \qquad 3x + 4 = -2x + 1 \\ x = -5 \qquad \qquad \qquad \quad 3x + 2x = -4 + 1 \\ x = -5 \qquad \qquad \qquad \quad 5x = -3 \\ \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \quad x = -3/5 \end{array}$$

Cara 2

$$\begin{array}{l} (3x + 4)^2 = (2x - 1)^2 \\ 9x^2 + 24x + 16 = 4x^2 - 4x + 1 \\ 5x^2 + 28x + 15 = 0 \\ (5x + 3)(x + 5) = 0 \\ \text{Jadi } x_1 = -3/5 \text{ dan } x_2 = -5 \end{array}$$

03. Tentukan nilai x yang memenuhi persamaan berikut :

(a) $|3x - 2| = x + 4$

(b) $|2x + 4| = x - 3$

Jawab

(a) $|3x - 2| = x + 4$

$$\begin{array}{l} (3x - 2)^2 = (x + 4)^2 \\ 9x^2 - 12x + 4 = x^2 + 8x + 16 \end{array}$$

$$8x^2 - 20x - 12 = 0$$

$$2x^2 - 5x - 3 = 0$$

$$(2x + 1)(x - 3) = 0$$

$$\text{Jadi } x_1 = -1/2 \text{ dan } x_2 = 3$$

$$\text{Uji: } x = -1/2 \text{ maka } x + 4 = -1/2 + 4 = 7/2 \text{ (memenuhi)}$$

$$\text{Uji: } x = 3 \text{ maka } x - 4 = 3 - 4 = -1 \text{ (memenuhi)}$$

$$\text{Sehingga } H = \{-1/2, 3\}$$

$$(b) |2x - 4| = x - 3$$

$$(2x - 4)^2 = (x - 3)^2$$

$$4x^2 - 16x + 16 = x^2 - 6x + 9$$

$$3x^2 - 22x + 7 = 0$$

$$(3x - 1)(x - 7) = 0$$

$$\text{Jadi } x_1 = 1/3 \text{ dan } x_2 = 7$$

$$\text{Uji: } x = 1/3 \text{ maka } x - 3 = 1/3 - 3 = -8/3 \text{ (tidak memenuhi)}$$

$$\text{Uji: } x = 7 \text{ maka } x - 4 = 7 - 4 = 3 \text{ (memenuhi)}$$

$$\text{Sehingga } H = \{7\}$$

04. Tentukan nilai x yang memenuhi persamaan $|x^2 - 10x + 20| = 4$

Jawab

$$x^2 - 10x + 20 = 4 \quad \text{atau} \quad x^2 - 10x + 20 = -4$$

$$x^2 - 10x + 16 = 0 \quad x^2 - 10x + 24 = 0$$

$$(x - 8)(x - 2) = 0 \quad (x - 6)(x - 4) = 0$$

$$x_1 = 8 \text{ dan } x_2 = 2 \quad x_1 = 6 \text{ dan } x_2 = 4$$

$$\text{Jadi } H = \{2, 4, 6, 8\}$$

05. Tentukan nilai x yang memenuhi persamaan $|x^2 - 4x - 2| = x - 8$

Jawab

$$x^2 - 4x - 2 = x - 8 \quad \text{atau} \quad x^2 - 4x - 2 = -(x - 8)$$

$$x^2 - 5x + 6 = 0 \quad x^2 - 3x - 10 = 0$$

$$(x - 3)(x - 2) = 0 \quad (x - 5)(x + 2) = 0$$

$$x_1 = 3 \text{ dan } x_2 = 2 \quad x_1 = 5 \text{ dan } x_2 = -2$$

$$\text{Uji: } x = -2 \text{ maka } x - 8 = -2 - 8 = -10 \text{ (tidak memenuhi)}$$

$$\text{Uji: } x = 2 \text{ maka } x - 8 = 2 - 8 = -6 \text{ (tidak memenuhi)}$$

$$\text{Uji: } x = 3 \text{ maka } x - 8 = 3 - 8 = -5 \text{ (tidak memenuhi)}$$

$$\text{Uji: } x = 5 \text{ maka } x - 8 = 5 - 8 = -3 \text{ (tidak memenuhi)}$$

Sehingga tidak ada nilai x yang memenuhi

06. Tentukan nilai x yang memenuhi persamaan $|x^2 - 4x + 18| = x^2 + 2x + 6$

Jawab

$$x^2 - 4x + 18 = -(x^2 + 2x + 6) \quad \text{atau} \quad x^2 - 4x + 18 = x^2 + 2x + 6$$

$$x^2 - 4x + 18 = -x^2 - 2x - 6 \quad x^2 - x^2 - 4x - 2x + 18 - 6 = 0$$

$$x^2 - x - 12 = 0 \quad -6x = -12$$

$$(x + 3)(x - 4) = 0 \quad x_1 = 2$$

$$x_1 = -3 \text{ dan } x_2 = 4$$

Uji: $x = -3$ maka $x^2 - 2x - 6 = (-3)^2 - 2(-3) - 6 = 9$ (Memenuhi)

Uji: $x = 2$ maka $x^2 - 2x - 6 = (2)^2 - 2(2) - 6 = -6$ (tidak memenuhi)

Uji: $x = 4$ maka $x^2 - 2x - 6 = (4)^2 - 2(4) - 6 = 2$ (Memenuhi)

Sehingga $H = \{-3, 4\}$

07. Tentukan nilai x yang memenuhi persamaan $|x - 1| - 2 = 2 - |2x - 1|$

Jawab

Untuk $x - 1 \geq 0$, $2x - 1 \geq 0$, berlaku : $(x - 1) - 2 = 2 - (2x - 1)$

$$x - 1 - 2 = 2 - 2x + 1$$

$$3x = 6$$

$$x = 2$$

Uji: $|2 - 1| - 2 = 2 - |2(2) - 1|$

(Memenuhi)

Untuk $x - 1 < 0$, $2x - 1 \geq 0$, berlaku : $[-(x - 1)] - 2 = 2 - (2x - 1)$

$$-x + 1 - 2 = 2 - 2x + 1$$

$$x = 4$$

Uji: $|4 - 1| - 2 = 2 - |2(4) - 1|$

(Tidak memenuhi)

Untuk $x - 1 \geq 0$, $2x - 1 < 0$, berlaku : $(x - 1) - 2 = 2 - [-(2x - 1)]$

$$x - 1 - 2 = 2 + 2x - 1$$

$$x = -4$$

Uji: $|-4 - 1| - 2 = 2 - |2(-4) - 1|$

(Tidak memenuhi)

Untuk $x - 1 < 0$, $2x - 1 < 0$, berlaku : $[-(x - 1)] - 2 = 2 - [-(2x - 1)]$

$$-x + 1 - 2 = 2 + 2x - 1$$

$$x = -2/3$$

Uji: $|-2/3 - 1| - 2 = 2 - |2(-2/3) - 1|$

(Memenuhi)

Jadi himpunan penyelesaiannya : $H = \{-2/3, 2\}$

08. Jika diketahui fungsi nilai mutlak $f(x) = |x - 4| + |6 - x|$ maka tentukanlah nilai x yang memenuhi $f(x) = 2007$

Jawab

$$|x - 4| + |6 - x| = 8$$

Untuk $x - 4 \geq 0$, $6 - x \geq 0$, berlaku : $(x - 4) + (6 - x) = 8$

$$2 = 8 \quad (\text{Tidak memenuhi})$$

Untuk $x - 4 \geq 0$, $6 - x < 0$, berlaku : $(x - 4) + [-(6 - x)] = 8$

$$x - 4 - 6 + x = 8$$

$$2x = 18$$

$$x = 9$$

Uji : $|9 - 4| + |6 - 9| = 8$ (memenuhi)

Untuk $x - 4 < 0$, $6 - x \geq 0$, berlaku : $[-(x - 4)] + (6 - x) = 8$

$$-x + 4 + 6 - x = 8$$

$$-2x = -2$$

$$x = 1$$

Uji : $|1 - 4| + |6 - 1| = 8$ (memenuhi)

Untuk $x - 4 < 0$, $6 - x < 0$, berlaku : $[-(x - 4)] + [-(6 - x)] = 8$

$$-x + 4 - 6 + x = 8$$

$$-2 = 8 \text{ (Tidak memenuhi)}$$

Jadi himpunan penyelesaiannya : $H = \{1, 9\}$