

PERSAMAAN DAN FUNGSI EKSPONEN SERTA LOGARITMA

E. Persamaan Logaritma

Pada materi kelas X telah diuraikan tentang logaritma. Adapun pengertian logaritma adalah : Jika ${}^a\log b = c$ maka $b = a^c$

Terdapat beberapa sifat dalam logaritma, yaitu

- | | |
|--|--|
| (1) ${}^a\log p + {}^a\log q = {}^a\log p \cdot q$ | (2) ${}^a\log p - {}^a\log q = {}^a\log \frac{p}{q}$ |
| (3) ${}^a\log p^n = n \cdot {}^a\log p$ | (4) ${}^a\log a = 1$ |
| (5) ${}^a\log b = \frac{{}^n\log a}{{}^n\log b}$ | (6) ${}^a\log b^m = \frac{m}{n} \cdot {}^a\log b$ |
| (7) ${}^a\log b = \frac{1}{{}^b\log a}$ | (8) ${}^a\log b = b$ |
| (9) ${}^a\log b \cdot {}^b\log c = {}^a\log c$ | |

Pada bab ini akan dibahas persamaan logaritma sederhana, yaitu bentuk logaritma ${}^a\log f(x)$. Untuk menyelesaikan persamaan logaritma sederhana, diperlukan aturan-aturan sebagai berikut :

- (1) Jika ${}^a\log f(x) = {}^a\log g(x)$ maka $f(x) = g(x)$ asalkan $f(x) > 0$ dan $g(x) > 0$
- (2) Jika ${}^a\log f(x) = {}^b\log f(x)$ maka $f(x) = 1$ dimana $a \neq b$
- (3) Jika $A[{}^a\log f(x)]^2 + B[{}^a\log f(x)] + C = 0$ maka bentuk itu diubah kedalam persamaan kuadrat asalkan $f(x) > 0$

Untuk lebih jelasnya, ikutilah contoh soal berikut ini :

01. Tentukanlah himpunan penyelesaian dari ${}^2\log(x^2 + 4x) = 5$

Jawab

$${}^2\log(x^2 + 4x) = 5$$

$${}^2\log(x^2 + 4x) = {}^2\log 2^5$$

$${}^2\log(x^2 + 4x) = {}^2\log 32$$

$$\text{Maka } x^2 + 4x = 32$$

$$x^2 + 4x - 32 = 0$$

$$(x - 4)(x + 8) = 0$$

$$x = 4 \text{ dan } x = -8$$

Jadi $H = \{-8, 4\}$

02. Tentukanlah himpunan penyelesaian dari $2 \cdot {}^3\log(x-5) - {}^3\log(18-2x) = 0$

Jawab

$$2 \cdot {}^3\log(x-5) - {}^3\log(18-2x) = 0$$

$${}^3\log(x-5)^2 = {}^3\log(18-2x)$$

$${}^3\log(x^2 - 10x + 25) = {}^3\log(18 - 2x)$$

Maka $x^2 - 10x + 25 = 18 - 2x$

$$x^2 - 10x + 2x + 25 - 18 = 0$$

$$x^2 - 8x + 7 = 0$$

$$(x - 7)(x - 1) = 0$$

$$x = 1 \text{ atau } x = 7$$

Karena untuk $x = 1$ berlaku $x - 5 = 1 - 5 = -4 < 0$ maka $x = 1$ tidak memenuhi

Jadi $H = \{7\}$

03. Tentukanlah himpunan penyelesaian dari $2 \cdot {}^2\log(x+3) = 1 + {}^2\log(x+7)$

Jawab

$$2 \cdot {}^2\log(x+3) = 1 + {}^2\log(x+7)$$

$${}^2\log(x+3)^2 = {}^2\log 2 + {}^2\log(x+7)$$

$${}^2\log(x+3)^2 = {}^2\log 2(x+7)$$

$${}^2\log(x^2 + 6x + 9) = {}^2\log(2x + 14)$$

Maka $x^2 + 6x + 9 = 2x + 14$

$$x^2 + 6x + 9 - 2x - 14 = 0$$

$$x^2 + 4x - 5 = 0$$

$$(x + 5)(x - 1) = 0$$

$$x = -5 \text{ atau } x = 1$$

Karena untuk $x = -5$ berlaku $x + 5 = -5 + 3 = -2 < 0$ maka $x = -5$ tidak memenuhi

Jadi $H = \{1\}$

04. Tentukanlah himpunan penyelesaian dari ${}^3\log(x+4) = {}^9\log(26-x^2)$

Jawab

$${}^3\log(x+4) = {}^9\log(26-x^2)$$

$${}^3{}^2\log(x+4)^2 = {}^9\log(26-x^2)$$

$${}^9\log(x^2 + 8x + 16) = {}^9\log(26 - x^2)$$

Maka $x^2 + 8x + 16 = 26 - x^2$

$$x^2 + 8x + 16 + x^2 - 26 = 0$$

$$2x^2 + 8x - 10 = 0$$

$$x^2 + 4x - 5 = 0$$

$$(x + 5)(x - 1) = 0$$

$$x = -5 \text{ atau } x = 1$$

Karena untuk $x = -5$ berlaku $x + 4 = -5 + 4 = -1 < 0$ maka $x = -5$ tidak memenuhi

Jadi $H = \{1\}$

05. Tentukanlah himpunan penyelesaian dari ${}^3\log^2 x - 2 \cdot {}^3\log x^2 - 8 = 0$

Jawab

$${}^3\log^2 x - 2 \cdot {}^3\log x^2 - 8 = 0$$

$${}^3\log^2 x - 4 \cdot {}^3\log x - 8 = 0$$

Misal ${}^3\log x = p$

$$p^2 - 4p - 8 = 0$$

$$(p - 4)(p + 2) = 0$$

$$p = 4 \text{ atau } p = -2$$

maka ${}^3\log x = 4$ sehingga $x = 3^4 = 81$

${}^3\log x = -2$ sehingga $x = 3^{-2} = 1/9$

Jadi $H = \{1/9, 81\}$

06. Tentukanlah nilai x jika $(2x)^{\log 5x} = 4$

Jawab

$$(2x)^{\log 5x} = 4$$

$$2^{\log 5x} \cdot x^{\log 5x} = 2^2$$

$$x^{\log 5x} = 2^{2 - \log 5x}$$

$$x^{\log 5x} = 2^{\log \frac{100}{5x}}$$

$$x^{\log 5x} = 2^{\log \frac{20}{x}}$$

$$(\log 5x)(\log x) = \left(\log \frac{20}{x}\right)(\log 2)$$

$$(\log 5 + \log x)(\log x) = (\log 20 - \log x)(\log 2)$$

$$\log 5 \cdot \log x + \log^2 x = \log 20 \cdot \log 2 - \log x \cdot \log 2$$

$$\log 5 \cdot \log x + \log^2 x = (\log 2 + 1) \cdot \log 2 - \log x \cdot \log 2$$

$$\log 5 \cdot \log x + \log^2 x = \log^2 2 + \log 2 - \log x \cdot \log 2$$

$$\log 5 \cdot \log x + \log x \cdot \log 2 = \log^2 2 + \log 2 - \log^2 x$$

$$\log x \cdot (\log 5 + \log 2) = \log^2 2 + \log 2 - \log^2 x$$

$$\log x = \log^2 2 + \log 2 - \log^2 x$$

$$\log x - \log 2 = \log^2 2 - \log^2 x$$

$$-(\log 2 - \log x) = (\log 2 - \log x)(\log 2 + \log x)$$

$$(\log 2 - \log x) - (\log 2 - \log x)(\log 2 + \log x) = 0$$

$$(\log 2 - \log x) [1 + (\log 2 + \log x)] = 0$$

$$(\log 2 - \log x) [\log 10 + \log 2 + \log x] = 0$$

$$(\log 2 - \log x) [\log 20 + \log x] = 0$$

$$\text{Maka } \log 2 - \log x = 0 \quad \text{dan} \quad \log 20 + \log x = 0$$

$$\log x = \log 2$$

$$x = 2$$

$$\log x = -\log 20$$

$$x = 1/20$$

07. Tentukanlah penyelesaian dari $10^{\log^2 x} + 10 \cdot x^{-\log x} = x^{\frac{1}{\log x}} + \log 10$

Jawab

$$\left[10^{\log x} \right]^{\log x} + 10 \cdot x^{-\log x} = x^{\frac{1}{\log x}} + 1$$

$$x^{\log x} + \frac{1}{x^{\log x}} = x^{x \log 10} + 1$$

$$x^{\log x} + \frac{1}{x^{\log x}} = 10 + 1 \quad \text{misalkan } x^{\log x} = P$$

$$P + \frac{1}{P} = 11$$

$$P^2 - 11P + 10 = 0$$

$$(P - 10)(P - 1) = 0$$

$$p_1 = 10$$

$$x^{\log x} = 10$$

$$\log x^{\log x} = \log 10$$

$$(\log x) (\log x) = 1$$

$$\log^2 x = 1$$

$$\text{Log } x = 1 \quad \text{atau} \quad \log x = -1$$

$$x_1 = 10 \quad \text{atau} \quad x_2 = 1/10$$

$$p_2 = 1$$

$$x^{\log x} = 1$$

$$\log x^{\log x} = \log 1$$

$$(\log x) (\log x) = 0$$

$$\log^2 x = 0$$

$$\log x = 0$$

$$x_3 = 1$$

08. Tentukanlah penyelesaian dari ${}^{3x+4}\log(2x+1)^2 + {}^{2x+1}\log(6x^2 + 11x + 4) = 4$

Jawab

$${}^{3x+4}\log(2x+1)^2 + {}^{2x+1}\log(6x^2 + 11x + 4) = 4$$

$${}^{3x+4}\log(2x+1)^2 + {}^{2x+1}\log(3x+4)(2x+1) = 4$$

$${}^{3x+4}\log(2x+1)^2 + {}^{2x+1}\log(3x+4) + {}^{2x+1}\log(2x+1) = 4$$

$${}^{3x+4}\log(2x+1)^2 + \frac{1}{{}^{3x+4}\log(2x+1)} + 1 = 4$$