

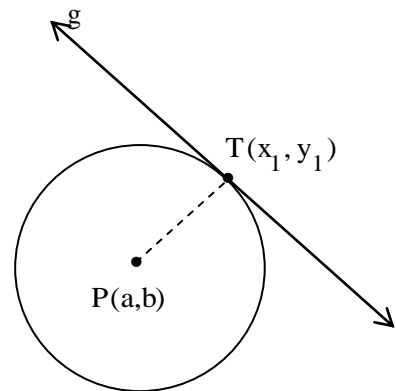
# LINGKARAN

## C. Persamaan Garis Singgung Lingkaran

Seperti yang telah diuraikan di atas, salah satu kedudukan garis terhadap lingkaran adalah garis menyinggung lingkaran. Dalam hal ini terdapat beberapa cara menyatakan persamaan garis singgung lingkaran, yaitu :

### (1). Jika diketahui titik singgungnya $T(x_1, y_1)$

Persamaan garis singgung  $g$  pada lingkaran  $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$  dengan pusat  $P(a, b)$  serta melalui titik  $T(x_1, y_1)$  yang terletak pada lingkaran (seperti pada gambar) dapat dirumuskan sebagai berikut :



Menurut aturan gradien, maka gradien garis  $PT$  dapat dirumuskan

$$m_{PT} = \frac{y_1 - b}{x_1 - a}$$

Karena  $g$  tegak lurus dengan  $PT$  maka gradien garis  $g$  dirumuskan :

$$m_g = -\frac{1}{m_{PT}} = -\frac{x_1 - a}{y_1 - b}$$

Sehingga persamaan garis singgung  $g$  adalah :

$$y - y_1 = m_g (x - x_1)$$

$$y - y_1 = -\frac{x_1 - a}{y_1 - b} (x - x_1)$$

$$(y - y_1)(y_1 - b) = -(x_1 - a)(x - x_1)$$

$$y_1y - by - y_1^2 + by_1 = -(x_1x - x_1^2 - ax + ax_1)$$

$$x_1x - x_1^2 - ax + ax_1 + y_1y - by - y_1^2 + by_1 = 0$$

$$x_1x - ax + ax_1 + y_1y - by + by_1 = x_1^2 + y_1^2 \dots\dots\dots (1)$$

Karena  $T(x_1, y_1)$  terletak pada lingkaran  $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$  maka berlaku :

$$(x_1 - a)^2 + (y_1 - b)^2 = r^2$$

$$x_1^2 - 2ax_1 + a^2 + y_1^2 - 2by_1 + b^2 = r^2$$

$$x_1^2 + y_1^2 = 2ax_1 - a^2 + 2by_1 - b^2 + r^2 \dots\dots\dots (2)$$

Substitusi (1) dan (2)

$$x_1x - ax + ax_1 + y_1y - by + by_1 = 2ax_1 - a^2 + 2by_1 - b^2 + r^2$$

$$(x_1x - ax + ax_1 - 2ax_1 + a^2) + (y_1y - by + by_1 - 2by_1 + b^2) = r^2$$

$$(x_1x - ax - ax_1 + a^2) + (y_1y - by - by_1 + b^2) = r^2$$

$$(x_1 - a)x - a(x_1 - a) + (y_1 - b)y - b(y_1 - b) = r^2$$

$$(x_1 - a)(x - a) + (y_1 - b)(y - b) = r^2$$

Jadi, persamaan garis singgung lingkaran  $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$  yang melalui titik  $T(x_1, y_1)$  pada lingkaran, dapat dirumuskan sebagai berikut :

$$(x_1 - a)(x - a) + (y_1 - b)(y - b) = r^2$$

Untuk lingkaran dengan pusat  $O(0, 0)$  dapat diperoleh dengan mengambil  $a = 0$  dan  $b = 0$ , sehingga diperoleh :  $x_1x + y_1y = r^2$

Jika persamaan diatas diuraikan akan diperoleh

$$(x_1 - a)(x - a) + (y_1 - b)(y - b) = r^2$$

$$x_1x - ax_1 - ax + a^2 + y_1y - by_1 - by + b^2 = r^2$$

$$x_1x + y_1y - a(x + x_1) - b(y + y_1) + a^2 + b^2 - r^2 = 0$$

karena  $a = -\frac{1}{2}A$  dan  $b = -\frac{1}{2}B$  serta  $a^2 + b^2 - r^2 = C$  maka diperoleh :

$$x_1x + y_1y + \frac{A}{2}(x + x_1) + \frac{B}{2}(y + y_1) + C = 0$$

Jadi, persamaan garis singgung lingkaran  $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$  yang melalui titik  $T(x_1, y_1)$  pada lingkaran, dapat juga dirumuskan

$$x_1x + y_1y + \frac{A}{2}(x + x_1) + \frac{B}{2}(y + y_1) + C = 0$$

Untuk lebih jelasnya, pelajailah contoh soal berikut ini:

01. Tentukanlah persamaan garis singgung lingkaran  $(x - 4)^2 + (y + 5)^2 = 13$  jika titik singgungnya di  $T(6, -2)$

Jawab

lingkaran  $(x - 4)^2 + (y + 5)^2 = 13$  Titiknya  $T(6, -2)$

maka :  $(x_1 - 4)(x - 4) + (y_1 + 5)(y + 5) = 13$

$$(6 - 4)(x - 4) + (-2 + 5)(y + 5) = 13$$

$$2(x - 4) + 3(y + 5) = 13$$

$$2x - 8 + 3y + 15 = 13$$

$$2x + 3y + 7 = 13$$

$$2x + 3y = 6$$

02. Tentukanlah persamaan garis singgung lingkaran  $x^2 + y^2 + 6x - 4y - 21 = 0$  jika titik singgungnya di  $T(2, 5)$

Jawab

lingkaran  $x^2 + y^2 + 6x - 4y - 21 = 0$  Titiknya  $T(2, 5)$

maka :  $x_1x + y_1y + \frac{6}{2}(x + x_1) + \frac{-4}{2}(y + y_1) - 21 = 0$

$$2x + 5y + 3(x + 2) - 2(y + 5) - 21 = 0$$

$$2x + 5y + 3x + 6 - 2y + 10 - 21 = 0$$

$$5x + 3y - 5 = 0$$

$$5x + 3y = 5$$

$$2x + 3y = 6$$

**(2) Jika diketahui gradien garis singgungnya m**

Misalkan  $g_1$  dan  $g_2$  adalah garis singgung lingkaran  $L \equiv (x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ , yang diketahui gradiennya yakni  $m$ ,

Maka persamaan  $g_1$  dan  $g_2$  dapat dicari dengan langkah sebagai berikut :

Misalkan  $g_{12} \equiv y = mx + n$ , maka jika disubstitusikan ke persamaan lingkaran diperoleh :

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

$$(x - a)^2 + (mx + n - b)^2 = r^2$$

$$x^2 - 2ax + a^2 + m^2x^2 + n^2 + b^2 + 2mnx - 2bmx - 2bn - r^2 = 0$$

$$x^2 + m^2x^2 - 2ax + 2mnx - 2bmx + a^2 + n^2 + b^2 - 2bn - r^2 = 0$$

$$(1 + m^2)x^2 - 2(a - mn + bm)x + (a^2 + n^2 + b^2 - 2bn - r^2) = 0$$

Syarat menyinggung adalah :

$$D = 0$$

$$\Leftrightarrow b^2 - 4ac = 0$$

$$\Leftrightarrow 4(a - mn + bm)^2 - 4(1 + m^2)(a^2 + n^2 + b^2 - 2bn - r^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (a - mn + bm)^2 - (1 + m^2)(a^2 + n^2 + b^2 - 2bn - r^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \cancel{a^2} + \cancel{m^2n^2} + \cancel{b^2m^2} - 2amn + 2abm - \cancel{2bm^2n} - \cancel{a^2} - n^2 - b^2 + 2bn + r^2 - a^2m^2 - \cancel{m^2n^2} - \cancel{b^2m^2} + \cancel{2bm^2n} + m^2r^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow -2amn + 2abm - n^2 - b^2 + 2bn + r^2 - a^2m^2 + m^2r^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2amn - 2abm + n^2 + b^2 - 2bn - r^2 + a^2m^2 - m^2r^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (n^2 + a^2m^2 + b^2 + 2amn - 2bn - 2abm) - r^2(1 + m^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (n + am - b)^2 = r^2(1 + m^2)$$

$$\Leftrightarrow n + am - b = \pm r\sqrt{1 + m^2}$$

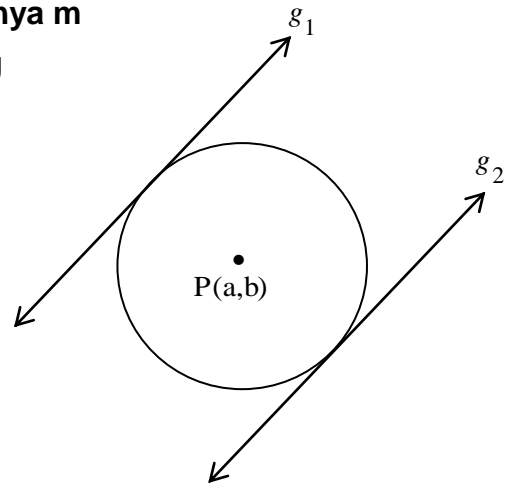
$$\Leftrightarrow n = -am + b \pm r\sqrt{1 + m^2}$$

$$\Leftrightarrow n = -(am - b) \pm r\sqrt{1 + m^2}$$

$$\text{Sehingga } g_{12} \equiv y = mx - (am - b) \pm r\sqrt{1 + m^2}$$

$$y = mx - am + b \pm r\sqrt{1 + m^2}$$

$$y - b = m(x - a) \pm r\sqrt{1 + m^2}$$



Jadi, persamaan garis singgung lingkaran  $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$  dengan gradien  $m$  dapat dirumuskan sebagai berikut :

$$y - b = m(x - a) \pm r\sqrt{1+m^2}$$

Untuk lingkaran dengan pusat  $O(0, 0)$  dapat diperoleh dengan mengambil  $a = 0$

dan  $b = 0$ , sehingga diperoleh :  $y = mx \pm r\sqrt{1+m^2}$

Untuk lebih jelasnya, pelajari contoh soal berikut ini:

03. Tentukanlah persamaan garis singgung lingkaran  $(x + 1)^2 + (y - 3)^2 = 5$  jika gradien garis singgungnya 2

Jawab

Lingkaran  $(x + 1)^2 + (y - 3)^2 = 5$  dan  $m = 2$

Sehingga :  $y - b = m(x - a) \pm r\sqrt{1+m^2}$

$$y - 3 = 2(x + 1) \pm \sqrt{5} \sqrt{1+2^2}$$

$$y - 3 = 2x + 2 \pm \sqrt{5} \sqrt{5}$$

$$y - 3 = 2x + 2 \pm 5$$

$$y = 2x + 5 \pm 5$$

Jadi garis singgungnya  $g_1 \equiv y = 2x + 5 + 5$  diperoleh  $y = 2x + 10$

$g_2 \equiv y = 2x + 5 - 5$  diperoleh  $y = 2x$

04. Tentukanlah persamaan garis singgung lingkaran  $x^2 + y^2 - 4x - 10y + 19 = 0$  jika gradien garis singgungnya  $-3$

Jawab

Lingkaran  $x^2 + y^2 - 4x - 10y + 19 = 0$

Maka :  $a = -\frac{-4}{2} = 2$

$$b = -\frac{-10}{2} = 5$$

$$r = \sqrt{\frac{(-4)^2}{4} + \frac{(-10)^2}{4} - 19} = \sqrt{4 + 25 - 19} = \sqrt{10}$$

$$m = -3$$

Sehingga :  $y - b = m(x - a) \pm r\sqrt{1+m^2}$

$$y - 5 = -3(x - 2) \pm \sqrt{10} \sqrt{1+(-3)^2}$$

$$y - 5 = -3x + 6 \pm \sqrt{10} \sqrt{10}$$

$$y - 5 = -3x + 6 \pm 10$$

$$y = -3x + 11 \pm 10$$

Jadi garis singgungnya  $g_1 \equiv y = -3x + 11 + 10$  diperoleh  $y = -3x + 21$

$g_2 \equiv y = -3x + 11 - 10$  diperoleh  $y = -3x + 1$

05. Tentukanlah persamaan garis singgung lingkaran  $(x - 4)^2 + (y - 3)^2 = 16$  yang sejajar dengan garis  $3x - 4y = 7$

Jawab

$$\text{Lingkaran } (x - 4)^2 + (y - 3)^2 = 16$$

$$\text{Garis : } 3x - 4y = 7$$

$$4y = 3x - 7$$

$$y = \frac{3}{4}x - \frac{7}{4} \quad \text{Jadi } m = \frac{3}{4}$$

Karena garis singgung lingkaran sejajar dengan garis tersebut, maka gradien garis singgung lingkaran juga  $\frac{3}{4}$

$$\text{Sehingga : } y - b = m(x - a) \pm r\sqrt{1 + m^2}$$

$$y - 3 = \frac{3}{4}(x - 4) \pm \sqrt{16} \sqrt{1 + \left(\frac{3}{4}\right)^2}$$

$$y - 3 = \frac{3}{4}(x - 4) \pm \sqrt{16} \sqrt{\frac{25}{4}}$$

$$y - 3 = \frac{3}{4}x - 3 \pm 4\left(\frac{5}{2}\right)$$

$$y - 3 = \frac{3}{4}x - 3 \pm 10$$

$$y = \frac{3}{4}x \pm 10$$

$$4y = 3x \pm 40$$

$$3x - 4y = \pm 40$$

$$\text{Jadi garis singgungnya } g_1 \equiv 3x - 4y = 40$$

$$g_2 \equiv 3x - 4y = -40$$

**(3) Garis singgung lingkaran  $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$  yang ditarik dari titik  $T(x_1, y_1)$  di luar lingkaran**

Langkah-langkah penyelesaian :

1. Menentukan persamaan garis polar, yakni

$$(x_1 - a)(x - a) + (y_1 - b)(y - b) = r^2 \quad \text{jika lingkarannya } (x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

$$x_1x + y_1y + \frac{A}{2}(x + x_1) + \frac{B}{2}(y + y_1) + C = 0 \quad \text{jika lingkarannya } x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$$

2. Substitusikan persamaan garis polar ke persamaan lingkaran L, sehingga diperoleh dua titik singgung  $T_1$  dan  $T_2$

3. Menentukan persamaan garis singgung lingkaran dengan  $T_1$  dan  $T_2$  titik singgungnya

Jika proses tersebut dilakukan pada bentuk umum lingkaran, maka akan diperoleh nilai m :

$$m = \frac{(y_1 - b)(x_1 - a) \pm r\sqrt{(y_1 - b)^2 + (x_1 - a)^2 - r^2}}{(x_1 - a)^2 - r^2}$$

Untuk lebih jelasnya, pelajari contoh soal berikut ini:

06. Tentukanlah persamaan garis singgung lingkaran  $x^2 + y^2 = 25$ , yang ditarik dari titik T(-1, 7)

Jawab

Menentukan persamaan garis polar, yakni:

$$x_1x + y_1y = r^2$$

$$(-1)x + (7)y = 25$$

$$-x + 7y = 25 \text{ maka } x = 7y - 25$$

Substitusikan persamaan garis polar ke persamaan lingkaran diperoleh

$$x^2 + y^2 = 25$$

$$(7y - 25)^2 + y^2 = 25$$

$$49y^2 - 350y + 625 + y^2 = 25$$

$$50y^2 - 350y + 600 = 0$$

$$y^2 - 7y + 12 = 0$$

$$(y - 3)(y - 4) = 0$$

$$y_1 = 3 \text{ dan } y_2 = 4$$

Untuk  $y_1 = 3$  diperoleh  $x_1 = 7(3) - 25 = -4$ . Titiknya (-4, 3)

Garis singgungnya  $x_1x + y_1y = 25$

$$-4x + 3y = 25$$

$$4x - 3y = -25$$

Untuk  $y_1 = 4$  diperoleh  $x_1 = 7(4) - 25 = 3$ . Titiknya (3, 4)

Garis singgungnya  $x_1x + y_1y = 25$

$$3x + 4y = 25$$

Cara lain menentukan garis singgung dengan menggunakan rumus gradien garis singgung, yakni

Garis singgung lingkaran :  $y - 7 = m(x - (-1))$

$$y - 7 = m(x + 1)$$

$$\text{Dimana : } m = \frac{(y_1 - b)(x_1 - a) \pm r\sqrt{(y_1 - b)^2 + (x_1 - a)^2 - r^2}}{(x_1 - a)^2 - r^2}$$

$$m = \frac{(7 - 0)(-1 - 0) \pm 5\sqrt{(7 - 0)^2 + (-1 - 0)^2 - 5^2}}{(-1 - 0)^2 - 5^2}$$

$$m = \frac{(7)(-1) \pm 5\sqrt{49 + 1 - 25}}{1 - 25}$$

$$m = \frac{-7 \pm 5\sqrt{25}}{-24} = \frac{-7 \pm 25}{-24}$$

$$\text{maka } m_1 = \frac{-7 + 25}{-24} = -\frac{3}{4} \quad \text{dan} \quad m_2 = \frac{-7 - 25}{-24} = \frac{4}{3}$$

$$\text{Jadi Garis singgung lingkaran : } g_1 \equiv y - 7 = -\frac{3}{4}(x + 1)$$

$$4y - 28 = -3x - 3$$

$$3x + 4y = 25$$

$$g_2 \equiv y - 7 = \frac{4}{3}(x + 1)$$

$$3y - 21 = 4x + 4$$

$$4x - 3y = -25$$

07. Tentukanlah persamaan garis singgung pada suatu lingkaran  $x^2 + y^2 + 2x - 19 = 0$  yang ditarik dari titik T(1, 6) di luar lingkaran

Jawab

Menentukan persamaan garis polar, yakni:

$$x_1x + y_1y + \frac{A}{2}(x + x_1) + \frac{B}{2}(y + y_1) + C = 0$$

$$(1)x + (6)y + \frac{2}{2}(x + 1) + \frac{0}{2}(y + 6) - 19 = 0$$

$$x + 6y + x + 1 - 19 = 0$$

$$2x + 6y = 18$$

$$x + 3y = 9 \quad \text{maka} \quad x = 9 - 3y$$

Substitusikan persamaan garis polar ke persamaan lingkaran diperoleh

$$x^2 + y^2 + 2x - 19 = 0$$

$$(9 - 3y)^2 + y^2 + 2(9 - 3y) - 19 = 0$$

$$81 - 54y + 9y^2 + y^2 + 18 - 6y - 19 = 0$$

$$10y^2 - 60y + 80 = 0$$

$$y^2 - 6y + 8 = 0$$

$$(y - 4)(y - 2) = 0$$

$$y_1 = 4 \quad \text{dan} \quad y_2 = 2$$

Untuk  $y_1 = 4$  diperoleh  $x_1 = 9 - 3(4) = -3$ . Titiknya (-3, 4)

$$\text{Garis singgungnya } x_1x + y_1y + \frac{A}{2}(x + x_1) + \frac{B}{2}(y + y_1) + C = 0$$

$$(-3)x + (4)y + \frac{2}{2}(x + [-3]) + \frac{0}{2}(y + 4) - 19 = 0$$

$$-3x + 4y + x - 3 - 19 = 0$$

$$-2x + 4y - 22 = 0$$

$$x - 2y = -11$$

Untuk  $y_2 = 2$  diperoleh  $x_2 = 9 - 3(2) = 3$ . Titiknya  $(3, 2)$

Garis singgungnya  $x_1x + y_1y + \frac{A}{2}(x + x_1) + \frac{B}{2}(y + y_1) + C = 0$

$$(3)x + (2)y + \frac{2}{2}(x + 3) + \frac{0}{2}(y + 2) - 19 = 0$$

$$3x + 2y + x + 3 - 19 = 0$$

$$4x + 2y - 16 = 0$$

$$2x + y = 8$$