

SISTEM PERSAMAAN LINIER

A. Persamaan dan Fungsi Linier

Suatu persamaan linier dapat dinyatakan sebagai $ax + by = c$. dalam hal ini x dan y adalah bilangan-bilangan real yang memenuhi persamaan itu.. Jika persamaan tersebut diubah menjadi fungsi linier, maka bentuk umumnya menjadi :

$$y = mx + c,$$

dalam hal ini x adalah *variabel bebas*, yakni bilangan real yang menjadi anggota himpunan daerah asal (domain).

Dan y adalah variabel terikat, yakni bilangan real yang menjadi anggota himpunan daerah hasil (range).

Gradien suatu garis merupakan angka yang menunjukkan tingkat kemiringan suatu garis. Sebuah fungsi linier $y = mx + c$ mempunyai gradient m sedangkan bentuk

umum persamaan linier $ax + by = c$ mempunyai gradient $m = -\frac{a}{b}$. Garis yang

horizontal (sejajar dengan sumbu-X) gradiennya 0, dan garis yang vertikal (sejajar dengan sumbu-Y) gradiennya ∞

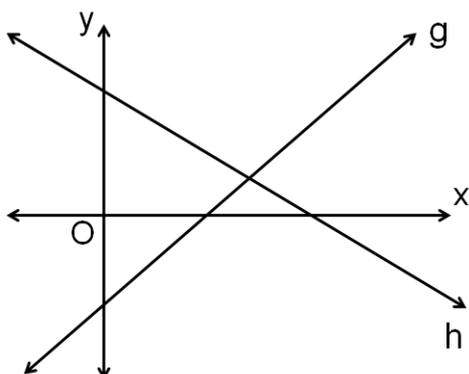
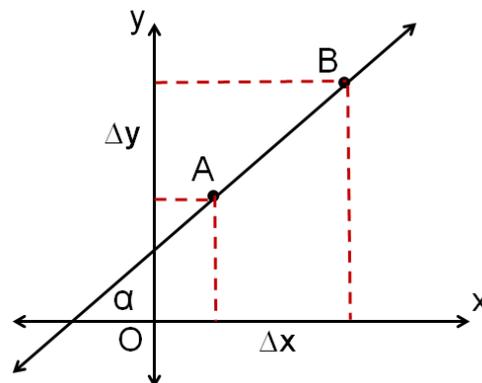
Jika sebuah garis melalui titik $A(x_1, y_1)$ dan titik $B(x_2, y_2)$ maka gradien garis itu

$$\text{dirumuskan } m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$\text{atau } m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$\text{atau } m = \tan \alpha$$

Sehingga gradien suatu garis merupakan laju perubahan nilai y terhadap nilai x pada garis itu.



Jika gradien bernilai positif maka perubahan nilai y terhadap nilai x selalu naik (semakin besar), dicontohkan dengan garis g pada gambar

Jika gradien bernilai negatif maka perubahan nilai y terhadap nilai x selalu turun (semakin kecil), dicontohkan dengan garis h pada gambar

Persamaan garis yang melalui titik $A(x_1, y_1)$ dengan gradien m dirumuskan :

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

Persamaan garis yang melalui titik $A(x_1, y_1)$ dan $B(x_2, y_2)$ dirumuskan :

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

Untuk lebih jelasnya ikutilah contoh soal berikut ini :

01. Tentukanlah nilai gradien garis $2x + 6y = 5$.

Jawab

$$m = -\frac{a}{b} = -\frac{2}{6} = -\frac{1}{3}$$

02. Sebuah garis melalui titik $A(-2, -3)$ dan titik $B(6, -5)$. Tentukanlah nilai gradien garis itu

Jawab

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-5 - (-3)}{6 - (-2)} = \frac{-2}{8} = -\frac{1}{4}$$

03. Tentukan persamaan garis dengan gradien 3 dan melalui titik $P(2, -4)$

Jawab

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - (-4) = 3(x - 2)$$

$$y + 4 = 3x - 6$$

$$y = 3x - 10$$

04. Tentukan persamaan garis yang melalui titik $P(-2, 3)$ dan titik $Q(2, -5)$

Jawab

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

$$\frac{y - 3}{-5 - 3} = \frac{x - (-2)}{2 - (-2)}$$

$$\frac{y - 3}{-8} = \frac{x + 2}{4}$$

$$4(y - 3) = -8(x + 2)$$

$$y - 3 = -2x - 4$$

$$y = -2x - 1$$

05. Pak Bambang memompa air sumur dengan mesin pompa untuk keperluan rumah tangganya. Pada menit ketiga mesin pompa dapat menghasilkan volume air 11 liter, dan pada menit ke-enam menghasilkan 17 liter. Jika laju kekuatan pompa selalu tetap maka tentukanlah persamaan garis yang menghubungkan volume air terhadap waktu

Jawab

Misalkan x adalah waktu kerja mesin air dan y adalah volume air yang dihasilkan mesin, maka :

Untuk $x = 3$, $y = 11$ diperoleh titik (3, 11)

Untuk $x = 6$, $y = 17$ diperoleh titik (6, 17)

$$\begin{aligned} \text{Diperoleh persamaan garis : } \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} &= \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \\ \frac{y - 11}{17 - 11} &= \frac{x - 3}{6 - 3} \\ \frac{y - 11}{6} &= \frac{x - 3}{3} \\ 3(y - 11) &= 6(x - 3) \\ y - 11 &= 2x - 6 \\ y &= 2x + 5 \end{aligned}$$

06. Sebuah mobil keluaran terbaru diuji kelayakan jalannya dengan cara dikendarai selama 10 jam. Pada 4 jam pertama mobil tersebut telah menempuh jarak 242 km dan setelah 6 jam mobil tersebut telah menempuh 362 km. Jika mobil selalu tetap maka tentukan persamaan garis yang menggambarkan kecepatan mobil

Jawab

Misalkan x adalah waktu jalan mobil dan y adalah jarak tempuh mobil, maka :

Untuk $x = 4$, $y = 242$ diperoleh titik (4, 242)

Untuk $x = 6$, $y = 362$ diperoleh titik (6, 362)

$$\begin{aligned} \text{Diperoleh persamaan garis : } \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} &= \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \\ \frac{y - 242}{362 - 242} &= \frac{x - 4}{6 - 4} \\ \frac{y - 242}{120} &= \frac{x - 4}{2} \\ y - 242 &= 60(x - 4) \\ y &= 60x + 2 \end{aligned}$$

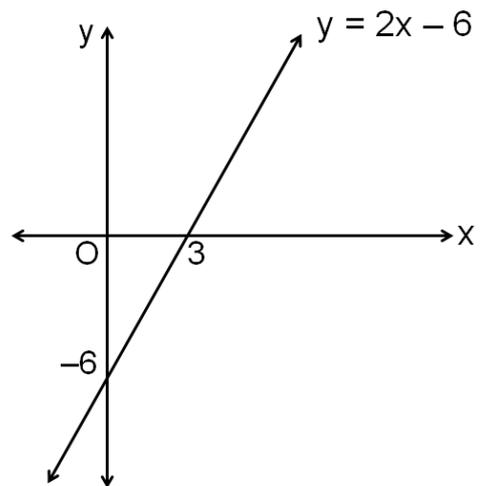
Untuk menggambar persamaan suatu garis pada grafik Cartesius, diperlukan minimal dua titik uji. Untuk lebih jelasnya ikutilah contoh soal berikut ini:

07. Gambarlah garis $y = 2x - 6$ pada grafik Cartesius

Jawab

Dengan menggunakan tabel diperoleh :

x	y	(x, y)
0	-6	(0, -6)
3	0	(3, 0)

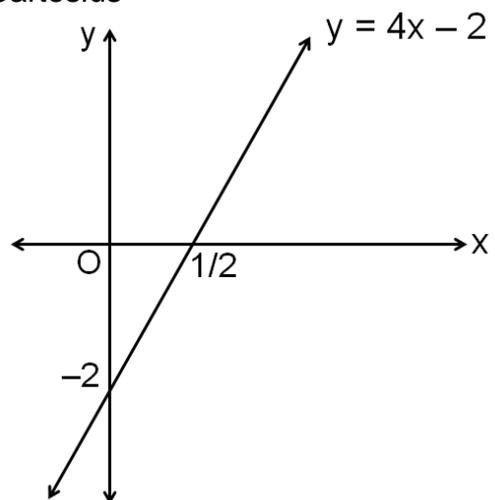


08. Gambarlah garis $y = 4x - 2$ pada grafik Cartesius

Jawab

Dengan menggunakan tabel diperoleh :

x	y	(x, y)
0	-2	(0, -2)
1/2	0	(1/2, 0)

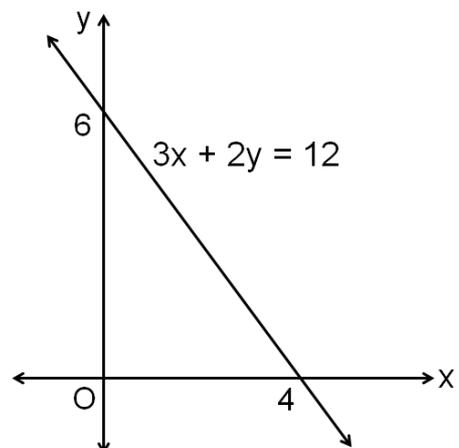


09. Gambarlah garis $3x + 2y = 12$ pada grafik Cartesius

Jawab

Dengan menggunakan tabel diperoleh :

x	y	(x, y)
0	6	(0, 6)
4	0	(4, 0)



10. Tentukanlah persamaan garis pada gambar berikut adalah

Jawab

Garis melalui (6, 0) dan (0, 4), maka

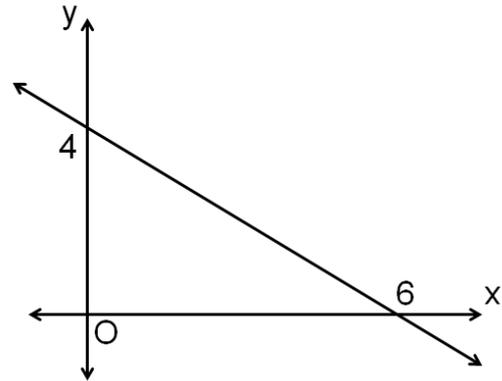
$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

$$\frac{y - 0}{4 - 0} = \frac{x - 6}{0 - 6}$$

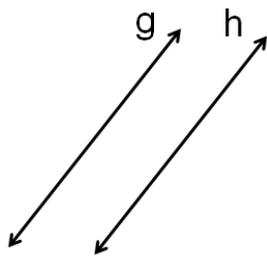
$$\frac{y}{4} = \frac{x - 6}{-6}$$

$$y = -\frac{4}{6}(x - 6)$$

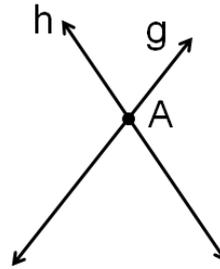
$$y = -\frac{2}{3}x + 4$$



Terdapat dua macam kedudukan dua garis, yaitu :



(1) Dua garis sejajar



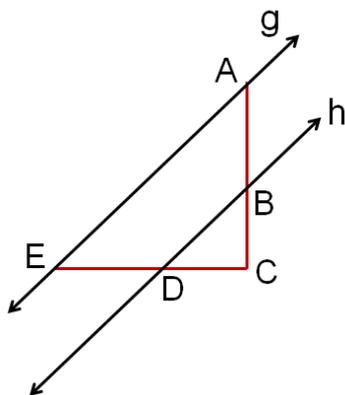
(2) Dua garis berpotongan

Secara analitis, syarat dari kedudukan dua garis tersebut, yakni $y = m_1x + c_1$ dan $y = m_2x + c_2$ adalah :

Kedua garis tersebut sejajar jika gradiennya sama ($m_1 = m_2$).

Kedua garis tersebut berpotongan jika gradiennya tidak sama ($m_1 \neq m_2$).

Berikut ini akan dibuktikan bahwa kedua gradient garis akan sama jika kedua garis itu sejajar.



Pada gambar disamping garis g dan h adalah dua garis yang sejajar.

Segitiga CEA dan CDB adalah segitiga yang sebangun, sehingga menurut teori kesebangunan segitiga berlaku :

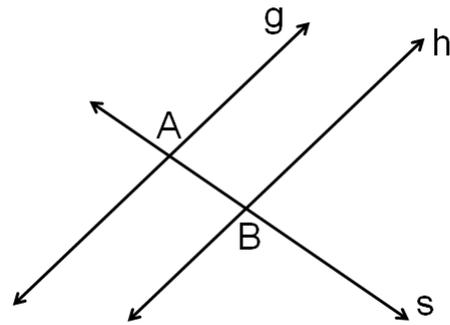
$$\frac{CB}{CA} = \frac{CD}{CE}$$

$$\frac{CB}{CD} = \frac{CA}{CE}$$

$$M_h = m_g$$

Terbukti bahwa kedua gradiennya sama

04. Pada gambar berikut diketahui titik A(3, 4) dan titik B(6, 2). Jika garis g sejajar h dan nilai gradien garis g dan s berselisih 2, maka tentukanlah persamaan garis h adalah ...
Jawab



Karena titik A(3, 4) dan B(6, 2) terletak pada s maka persamaan garis s adalah

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

$$\frac{y - 2}{4 - 2} = \frac{x - 6}{3 - 6}$$

$$\frac{y - 2}{2} = \frac{x - 6}{-3}$$

$$y - 2 = -\frac{2}{3}(x - 6)$$

$$y = -\frac{2}{3}x + 6 \quad \text{Gradien garis s adalah } m_s = -\frac{2}{3}$$

$$m_g - m_s = 2$$

$$m_g - \left(-\frac{2}{3}\right) = 2$$

$$m_g = 2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$$

$$\text{Maka } m_g = m_h = \frac{4}{3}$$

$$\text{Jadi persamaan garis h adalah : } y - 2 = \frac{4}{3}(x - 6)$$

$$3y - 6 = 4x - 24$$

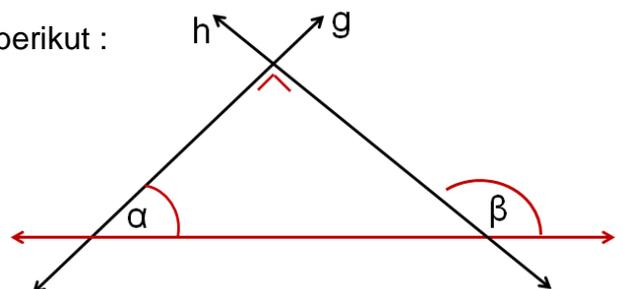
$$4x - 3y = -18$$

Dua garis g dan h akan berpotongan tegak lurus jika hasil kali kedua gradiennya sama dengan -1. Dengan kata lain :

$$m_g \cdot m_h = -1$$

Bukti dari sifat ini dapat diuraikan sebagai berikut :

Seperti yang telah diketahui bahwa gradien suatu garis adalah nilai tangen sudut yang dibentuk oleh garis tersebut arah ke atas dengan garis horizontal arah ke kanan



$$m_g = \tan \alpha$$

$$m_h = \tan \beta$$

Menurut aturan jumlah sudut dalam segitiga, diperoleh :

$$\alpha + (180 - \beta) + 90 = 180$$

$$90 - \beta = -\alpha$$

$$\tan (90 - \beta) = \tan(-\alpha)$$

$$\cot \beta = -\tan \alpha$$

$$\frac{1}{\tan \beta} = -\tan \alpha$$

$$\tan \alpha \cdot \tan \beta = -1$$

$$\text{Jadi } m_g \cdot m_h = -1$$

Untuk lebih jelasnya ikutilah contoh soal berikut ini :

05. Sebuah garis melalui titik A(-3, 4). Jika garis tersebut tegak lurus dengan garis $2x - 5y = 8$ maka tentukanlah persamaan garis itu.

Jawab

$$\text{garis } 2x - 5y = 8 \text{ gradiennya } m = -\frac{2}{(-5)} = \frac{2}{5}$$

Garis g melalui A(-3, 4) dan tegak lurus garis $2x - 5y = 8$ maka $m_g \cdot \left(\frac{2}{5}\right) = -1$

$$m_g = -\frac{5}{2}$$

$$\text{Jadi persamaan garis h adalah : } y - 4 = -\frac{5}{2}(x - [-3])$$

$$2y - 8 = -5x - 15$$

$$5x + 2y - 7 = 0$$

06. Sebuah garis $ax + by = c$. Jika garis tersebut tegak lurus dengan $3x - 2y = 8$ dan melalui titik (6, -2) maka tentukanlah persamaan garis itu

Jawab

$$\text{garis } 2x - 5y = 8 \text{ gradiennya } m = -\frac{2}{(-5)} = \frac{2}{5}$$

Garis g melalui A(-3, 4) dan tegak lurus garis $2x - 5y = 8$ maka $m_g \cdot \left(\frac{2}{5}\right) = -1$

$$m_g = -\frac{5}{2}$$

$$\text{Jadi persamaan garis h adalah : } y - 4 = -\frac{5}{2}(x - [-3])$$

$$2y - 8 = -5x - 15$$

$$5x + 2y - 7 = 0$$