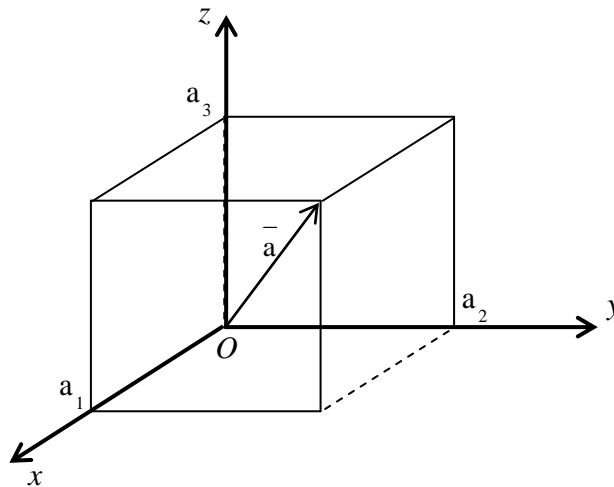


VEKTOR

D. Perkalian Skalar Dua Vektor

Misalkan a_1 , a_2 dan a_3 adalah bilangan-bilangan positif dan diketahui persamaan vektor $\vec{a} = a_1 \vec{i} + a_2 \vec{j} + a_3 \vec{k}$, maka panjang vektor \vec{a} secara geometris dapat digambarkan:



Dengan bantuan teorema Pythagoras dapat ditentukan panjang vektor \vec{a} , yaitu :

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}.$$

Sedangkan untuk $A(x_A, y_A, z_A)$ dan $B(x_B, y_B, z_B)$ maka panjang vektor \vec{AB} dirumuskan

$$|\vec{AB}| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$

Sebagai contoh, misalkan vector $\vec{a} = 4\vec{i} - 5\vec{j} + 3\vec{k}$, maka panjang vector \vec{a} adalah

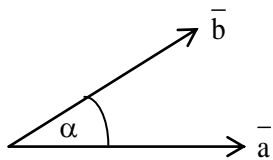
$$|\vec{a}| = \sqrt{4^2 + (-5)^2 + 3^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2} \text{ satuan panjang.}$$

Sedangkan untuk titik $A(-2, 4, -1)$ dan $B(-5, 2, 5)$, maka panjang vektor \vec{AB} didapat :

$$|\vec{AB}| = \sqrt{(-5+2)^2 + (2-4)^2 + (5+1)^2} = \sqrt{(-3)^2 + (-2)^2 + 6^2} = \sqrt{9+4+36} = 7 \text{ satuan}$$

panjang

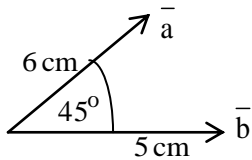
Jika $\vec{a} = a_1 \vec{i} + a_2 \vec{j} + a_3 \vec{k}$ dan $\vec{b} = b_1 \vec{i} + b_2 \vec{j} + b_3 \vec{k}$ maka perkalian skalar \vec{a} dan \vec{b} secara geometris didefinisikan:



$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \alpha \dots\dots\dots (1)$$

dimana α adalah sudut antara \vec{a} dan \vec{b} .

Sebagai contoh diketahui dua vector \vec{a} dan \vec{b} seperti gambar berikut.



Tentukanlah nilai $\vec{a} \cdot \vec{b}$

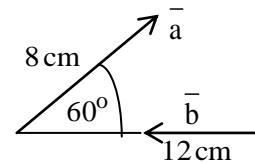
Jawab

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \alpha$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 6 \cdot 5 \cdot \cos 45^\circ = 15\sqrt{2}$$

Untuk lebih jelasnya ikutilah contoh soal berikut ini :

01. Diketahui dua vektor \vec{a} dan \vec{b} seperti gambar di samping, Tentukanlah nilai $\vec{a} \cdot \vec{b}$



Jawab

Karena kedua pangkal vektor belum berimpit, maka kedua vektor digambar menjadi

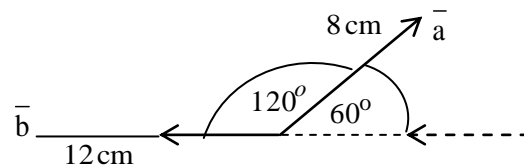
Sehingga sudut antara \vec{a} dan \vec{b} adalah 120°

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \alpha$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (8)(12) \cdot \cos 120^\circ$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (8)(12)(-1/2)$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = -48$$



02. Jika diketahui dua vektor \vec{a} dan \vec{b} dimana $|\vec{a}| = 6$ cm dan $|\vec{b}| = 4$ cm serta berlaku $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = 16$. Tentukanlah nilai $\vec{a} \cdot \vec{b}$

Jawab

$$(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = 16.$$

$$\vec{a} \cdot \vec{a} + \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{a} + \vec{b} \cdot \vec{b} = 16.$$

$$|\vec{a}| |\vec{a}| \cos 0^\circ + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}| |\vec{b}| \cos 0^\circ = 16$$

$$|\vec{a}| |\vec{a}| (1) + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}| |\vec{b}| (1) = 16$$

$$(6)(6) + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + (4)(4) = 16$$

$$36 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + 16 = 16$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = -18$$

03. Jika diketahui vektor \vec{a} dan \vec{b} dimana $|\vec{a}| = 4$ cm dan $|\vec{b}| = 5$ cm serta $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 60^\circ$ maka tentukanlah nilai $|\vec{a} - \vec{b}|$

Jawab

$$\begin{aligned}
 (\vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) &= \vec{a} \cdot \vec{a} - \vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{b} \cdot \vec{a} + \vec{b} \cdot \vec{b} \\
 |\vec{a} - \vec{b}| |\vec{a} - \vec{b}| \cos 0^\circ &= |\vec{a}| |\vec{a}| \cos 0^\circ - |\vec{a}| |\vec{b}| \cos 60^\circ - |\vec{b}| |\vec{a}| \cos 60^\circ + |\vec{b}| |\vec{b}| \cos 0^\circ \\
 |\vec{a} - \vec{b}|^2 (1) &= |\vec{a}| |\vec{a}| (1) - |\vec{a}| |\vec{b}| (1/2) - |\vec{b}| |\vec{a}| (1/2) + |\vec{b}| |\vec{b}| (1) \\
 |\vec{a} - \vec{b}|^2 &= (4)(4)(1) - (4)(5)(1/2) - (5)(4)(1/2) + (5)(5)(1) \\
 |\vec{a} - \vec{b}|^2 &= 16 - 10 - 10 + 25 \\
 |\vec{a} - \vec{b}|^2 &= 21 \\
 |\vec{a} - \vec{b}| &= \sqrt{21}
 \end{aligned}$$

Sedangkan secara analitis perkalian skalar dua vektor \vec{a} dan \vec{b} didapat dengan cara :

$$\begin{aligned}
 \vec{a} \cdot \vec{b} &= (a_1 \vec{i} + a_2 \vec{j} + a_3 \vec{k}) \cdot (b_1 \vec{i} + b_2 \vec{j} + b_3 \vec{k}) \\
 \vec{a} \cdot \vec{b} &= a_1 b_1 \vec{i} \cdot \vec{i} + a_1 b_2 \vec{i} \cdot \vec{j} + \dots + a_2 b_2 \vec{j} \cdot \vec{j} + \dots + a_3 b_3 \vec{k} \cdot \vec{k} \\
 \vec{a} \cdot \vec{b} &= a_1 b_1 |\vec{i}| |\vec{i}| \cos 0^\circ + a_1 b_2 |\vec{i}| |\vec{j}| \cos 90^\circ + a_2 b_2 |\vec{i}| |\vec{k}| \cos 90^\circ + \dots + a_2 b_2 |\vec{i}| |\vec{j}| \\
 &\cos 90^\circ + \dots + a_3 b_3 |\vec{k}| |\vec{k}| \cos 0^\circ \\
 \vec{a} \cdot \vec{b} &= a_1 b_1 (1)(1)(1) + a_1 b_2 (1)(1)(0) + \dots + a_2 b_2 (1)(1)(1) + \dots + a_3 b_3 (1)(1)(1) \\
 \vec{a} \cdot \vec{b} &= a_1 b_1 (1) + (0) + (0) + (0) + a_2 b_2 (1) + (0) + (0) + (0) + a_3 b_3 (1) \\
 \vec{a} \cdot \vec{b} &= a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 \dots \dots \dots (2)
 \end{aligned}$$

Untuk lebih jelasnya ikutilah contoh soal berikut ini :

04. Diketahui dua vektor $\vec{a} = 3\vec{i} - 3\vec{j} + 5\vec{k}$ dan $\vec{b} = 4\vec{i} - 5\vec{j} + 3\vec{k}$. Maka tentukanlah nilai $\vec{a} \cdot \vec{b}$

Jawab

$$\begin{aligned}
 \vec{a} \cdot \vec{b} &= (3)(4) + (-3)(-5) + (5)(3) \\
 \vec{a} \cdot \vec{b} &= 12 + 15 + 15 \\
 \vec{a} \cdot \vec{b} &= 42
 \end{aligned}$$

05. Diketahui tiga titik A(4, -1, 2), B(5, 2, 5) dan C(-3, 4, 0). Tentukanlah nilai $\overline{AB} \cdot \overline{AC}$

Jawab

$$\overline{AB} = \begin{bmatrix} 5-4 \\ 2-(-1) \\ 5-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\overline{AC} = \begin{bmatrix} -3-4 \\ 4-(-1) \\ 0-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 \\ 5 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$\text{Maka } \overline{AB} \cdot \overline{AC} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -7 \\ 5 \\ -2 \end{bmatrix} = (1)(-7) + (3)(5) + (3)(-2) = -7 + 15 - 6 = 2$$

06. Diketahui P(2, 2x, 0), Q(-1, 1, -7) dan R(3x, 3, x). Jika $\overline{PQ} \cdot \overline{PR} = -23$ maka tentukanlah nilai x

Jawab

$$\overline{PQ} \cdot \overline{PR} = -23$$

$$\begin{bmatrix} -1-2 \\ 1-2x \\ -7-0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3x-2 \\ 3-2x \\ x-0 \end{bmatrix} = -23$$

$$\begin{bmatrix} -3 \\ 1-2x \\ -7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3x-2 \\ 3-2x \\ x \end{bmatrix} = -23$$

$$-3(3x-2) + (1-2x)(3-2x) + (-7)(x) = -23$$

$$-9x + 6 + 3 - 2x - 6x + 4x^2 - 7x + 23 = 0$$

$$4x^2 - 24x + 32 = 0$$

$$x^2 - 6x + 8 = 0$$

$$(x-4)(x-2) = 0$$

Maka $x = 4$ atau $x = 2$

Jika $\vec{a} = a_1 \vec{i} + a_2 \vec{j} + a_3 \vec{k}$ dan $\vec{b} = b_1 \vec{i} + b_2 \vec{j} + b_3 \vec{k}$ maka sudut antara \vec{a} dan \vec{b} didapat dengan menurunkan rumus perkalian skalar dua vektor, yaitu :

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \alpha$$

$$\cos \alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} \text{ atau}$$

$$\cos \alpha = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}{\sqrt{(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2)}} \dots\dots\dots (1)$$

Jika \vec{a} dan \vec{b} tegak lurus, maka sudut antara \vec{a} dan \vec{b} adalah 90° sehingga :

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos 90^\circ$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cdot 0$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

Jadi jika vektor \vec{a} tegak lurus vektor \vec{b} maka $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ (2)

Untuk lebih jelasnya ikutilah contoh soal berikut ini :

01. Diketahui vektor \vec{a} dan \vec{b} dimana $|\vec{a}| = 3$ cm dan $|\vec{b}| = 4$ cm. Jika $\vec{a} \cdot \vec{b} = -6$ maka tentukanlah besar sudut antara \vec{a} dan \vec{b}

Jawab

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \alpha$$

$$-6 = (3)(4) \cos \alpha$$

$$-6 = 12 \cos \alpha$$

$$\cos \alpha = -\frac{1}{2}$$

$$\text{maka } \alpha = 120^\circ$$

02. Diketahui tiga titik A(2, 1, 0), B(-1, -3, 5) dan C(2, 3, 2). Jika α adalah sudut antara \vec{AB} dan \vec{AC} maka tentukanlah nilai $\cos \alpha$

Jawab

$$\vec{AB} = \begin{bmatrix} -1-2 \\ -3-1 \\ 5-0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ -4 \\ 5 \end{bmatrix} \quad \vec{AC} = \begin{bmatrix} 2-2 \\ 3-1 \\ 2-0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\text{Maka : } \vec{AB} \cdot \vec{AC} = (-3)(0) + (-4)(2) + (5)(2) = 0 - 8 + 10 = 2$$

$$|\vec{AB}| = \sqrt{(-3)^2 + (-4)^2 + 5^2} = \sqrt{9+16+25} = \sqrt{50}$$

$$|\vec{AC}| = \sqrt{0^2 + 2^2 + 2^2} = \sqrt{0+4+4} = \sqrt{8}$$

$$\text{Sehingga } \cos \alpha = \frac{2}{\sqrt{50}\sqrt{8}}$$

$$\cos \alpha = \frac{2}{\sqrt{400}}$$

$$\cos \alpha = \frac{2}{20}$$

$$\cos \alpha = \frac{1}{10}$$

03. Diketahui vektor $\vec{a} = \begin{bmatrix} x+1 \\ -2 \\ 5 \end{bmatrix}$ dan $\vec{b} = \begin{bmatrix} 3x \\ x^2 \\ -2 \end{bmatrix}$. Jika \vec{a} tegak lurus \vec{b} maka tentukanlah

nilai x

Jawab

Jika vektor \vec{a} tegak lurus vektor \vec{b} maka $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

Maka : $\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{bmatrix} x+1 \\ -2 \\ 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3x \\ x^2 \\ -2 \end{bmatrix} = 0$

$$(x+1)(3x) + (-2)(x^2) + (5)(-2) = 0$$

$$3x^2 + 3x - 2x^2 - 10 = 0$$

$$x^2 + 3x - 10 = 0$$

$$(x+5)(x-2) = 0$$

Jadi $x = -5$ atau $x = 2$

04. Diketahui vektor \vec{a} dan \vec{b} dimana $|\vec{a}| = 6$ cm dan $|\vec{b}| = 4$ cm serta $|\vec{a} + \vec{b}| = 8$ cm.

Jika α adalah sudut antara \vec{a} dan \vec{b} , maka tentukanlah nilai $\cos \alpha$

Jawab

$$(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{a} + \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{a} + \vec{b} \cdot \vec{b}$$

$$|\vec{a} + \vec{b}| |\vec{a} + \vec{b}| \cos 0^\circ = |\vec{a}| |\vec{a}| \cos 0^\circ + |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \alpha + |\vec{b}| |\vec{a}| \cos \alpha + |\vec{b}| |\vec{b}| \cos 0^\circ$$

$$(8)(8) (1) = (6)(6) (1) + (6)(4) \cos \alpha + (4)(6) \cos \alpha + (4)(4)(1)$$

$$64 = 36 + 24 \cos \alpha + 24 \cos \alpha + 16$$

$$64 = 52 + 48 \cos \alpha$$

$$64 - 52 = 48 \cos \alpha$$

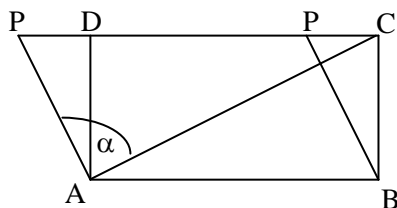
$$48 \cos \alpha = 12$$

$$\cos \alpha = 1/4 \quad \text{jadi } \alpha = 75,52^\circ$$

05. Diketahui persegi panjang ABCD dimana P pada CD sehingga $\overline{CP} : \overline{PD} = 1 : 3$.

Jika panjang \overline{AB} 8 cm dan \overline{AD} 6 cm, maka tentukanlah nilai $\overline{AB} \cdot \overline{PB} + \overline{BC} \cdot \overline{PB}$

Jawab



$$|\overline{AC}| = 10 \text{ cm}$$

$$|\overline{PA}| = \sqrt{40} \text{ cm} = 2\sqrt{10} \text{ cm}$$

$$|\overline{PC}| = 10 \text{ cm}$$

$$\overline{AB} \cdot \overline{PB} + \overline{BC} \cdot \overline{PB} = \overline{PB} \cdot (\overline{AB} + \overline{BC})$$

$$= \overline{PB} \cdot \overline{AC}$$

$$= |\overline{PB}| |\overline{AC}| \cos \alpha$$

$$= |\overline{PA}| |\overline{AC}| \cos \alpha$$

$$= 2\sqrt{10} \cdot 10 \cdot \cos \alpha \dots\dots\dots (1)$$

$$|\overline{PC}|^2 = |\overline{AP}|^2 + |\overline{AC}|^2 - 2|\overline{AP}||\overline{AC}| \cos \alpha$$

$$10^2 = (\sqrt{40})^2 + 10^2 - 2\sqrt{40} \cdot 10 \cos \alpha$$

$$100 = 40 + 100 - 40\sqrt{40} \cos \alpha \quad \text{sehingga} \quad \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{10}} \dots\dots\dots (2)$$

$$\text{Jadi : } \overline{AB} \cdot \overline{PB} + \overline{BC} \cdot \overline{PB} = 2\sqrt{10} \cdot 10 \cdot \frac{1}{\sqrt{10}} = 20$$