

M A T R I K S

C. Perkalian Matriks

Misalkan terdapat sebuah tabel ketidakhadiran dua orang siswa pada kursus Bahasa Inggris dengan alasan sakit (S), izin (I) atau Tanpa keterangan (TK)

Siswa/Hari	S	I	TK
Amir	2	1	3
Budi	4	3	2

Dalam bentuk matriks $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 1 \end{bmatrix}$

Untuk masing-masing alasan ketidakhadiran diberi bobot pelanggaran berdasarkan tabel sebagai berikut

Alasan	Bobot
Sakit	1
Izin	2
Tampa Ket	3

Dalam bentuk matriks $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

Jika dihitung total bobot pelanggaran kedua orang siswa tersebut, maka dilakukanlah proses perkalian matriks, yaitu :

Siswa/Hari	S	I	TK
Amir	2	1	3
Budi	4	3	2

Alasan	Bobot
Sakit	1
Izin	2
Tampa Ket	3

Siswa	Bobot
Amir	$2(1)+1(2)+3(3) = 13$
Budi	$4(1)+3(2)+2(3) = 16$

Atau dalam bentuk matriks

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2(1) + 1(2) + 3(3) \\ 4(1) + 3(2) + 2(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ 16 \end{bmatrix}$$

Dari sini diperoleh kesimpulan :

Jika matriks C adalah hasil kali dari dua matriks A dan B maka berlaku hubungan :

$A_{p \times n} \times B_{n \times q} = C_{p \times q}$ Matriks $C_{p \times q}$ didapat dengan cara mengalikan baris matriks $A_{p \times n}$ dengan kolom matriks $B_{n \times q}$

Untuk lebih memahami penjelasan di atas, akan diuraikan dalam contoh soal sebagai berikut:

01. Tentukanlah hasil setiap perkalian matriks berikut ini

$$(a) \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 0 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$$

$$(b) \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$(c) \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$(d) \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

Jawab

$$\begin{aligned} (a) \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 0 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 2(-1)+1(3)+(-3)(4) & 2(2)+1(0)+(-3)(2) \\ -1(-1)+0(3)+2(4) & -1(2)+0(0)+2(2) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -2+3-12 & 4+0-6 \\ 1+0+8 & -2+0+4 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -11 & -2 \\ 9 & 2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (b) \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 2(0)+0(2) & 2(-4)+0(-1) \\ -3(0)+1(2) & -3(-4)+1(-1) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0+0 & -8+0 \\ 0+2 & 12-1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -8 \\ 2 & 11 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (c) \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 3(-1)+(-1)(2) & 3(1)+(-1)(0) & 3(3)+(-1)(2) \\ -1(-1)+0(2) & -1(1)+0(0) & -1(3)+0(2) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -3-2 & 3-0 & 9-2 \\ 1+0 & -1+0 & -3+0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -5 & 3 & 7 \\ 1 & -1 & -3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (d) \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 2(1)+0(2) & 2(4)+0(-1) & 2(0)+0(3) \\ 0(1)+3(2) & 0(4)+3(-1) & 0(0)+3(3) \\ -1(1)+3(2) & -1(4)+3(-1) & -1(0)+3(3) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2+0 & 8+0 & 0+0 \\ 0+6 & 0-3 & 0+9 \\ -1+6 & -4-3 & 0+9 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 & 8 & 0 \\ 6 & -3 & 9 \\ 5 & -7 & 9 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

02. Diketahui dua table sebagai berikut :

Tabel 1

Kebutuhan bahan pembuat roti

	Tepung (kg)	Mentega (kg)
Roti1	3	2
Roti 2	2	1
Roti 3	4	1

Tabel 2

Harga bahan pembuar roti

	Januari 2008	Februari 2008
Tepung	Rp.5.000	Rp.5.500
Mentega	Rp.6.000	Rp.7.000

Susunlah tabel total biaya pembuatan setiap jenis roti dalam bulan Januari dan Februari 2008

Jawab

	Tepung (kg)	Mentega (kg)
Roti1	3	2
Roti 2	2	1
Roti 3	4	1

Dalam bentuk matriks $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$

	Januari 2008	Februari 2008
Tepung	Rp.5.000	Rp.5.500
Mentega	Rp.6.000	Rp.7.000

Dalam bentuk matriks $B = \begin{bmatrix} 5000 & 5500 \\ 6000 & 7000 \end{bmatrix}$

Sehingga tabel total biaya pembuatan setiap jenis roti adalah :

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 5000 & 5500 \\ 6000 & 7000 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3(5000) + 2(6000) & 3(5500) + 2(7000) \\ 2(5000) + 1(6000) & 2(5500) + 1(7000) \\ 4(5000) + 1(6000) & 4(5500) + 1(7000) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 27000 & 30500 \\ 16000 & 18000 \\ 26000 & 29000 \end{bmatrix}$$

Jika dibuat dalam bentuk tabel menjadi :

	Januari 2008	Februari 2008
Roti1	27.000	30.500
Roti 2	16.000	18.000
Roti 3	26.000	29.000

Terdapat beberapa sifat pada perkalian matriks, yaitu :

1. $A \times B \neq B \times A$
2. $(A \times B) \times C = A \times (B \times C)$
3. $A(B + C) = AB + AC$
4. Jika p dan q anggota real dan A dan B suatu matriks maka $(pA)(qB) = (pq)AB$
5. Jika A^t dan B^t adalah transpose matriks A dan B maka $(A \times B)^t = B^t \times A^t$
6. Jika A matriks persegi maka $A^2 = A \times A$

03. Diketahui matriks $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 7 & -9 \\ 8 & 15 \end{bmatrix}$ dan $C = \begin{bmatrix} -6 & 11 \\ -7 & -12 \end{bmatrix}$. Tentukanlah matriks hasil dari $AB + AC$

Jawab

$$\begin{aligned}
 AB + AC &= A(B + C) \\
 &= \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 6 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 7 & -9 \\ 8 & 15 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -6 & 11 \\ -7 & -12 \end{bmatrix} \right) \\
 &= \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 3+4 & 6+12 \\ 1+6 & 2+18 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 7 & 18 \\ 7 & 20 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

04. Tentukanlah hasil dari $\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3/4 & -1/4 \\ 5/4 & 3/2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 8 & -4 \\ -8 & 4 \end{bmatrix}$

Jawab

$$\begin{aligned}
 &= \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} \times \left(\begin{bmatrix} 3/4 & -1/4 \\ 5/4 & 3/2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 8 & -4 \\ -8 & 4 \end{bmatrix} \right) \\
 &= \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 6+2 & -3-1 \\ 10-12 & -5+6 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 8 & -4 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 40-6 & -20+3 \\ 32+4 & -16-2 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 34 & -17 \\ 36 & -18 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

05. Diketahui matriks $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$ dan fungsi $f(x) = x^2 - 3x$, maka tentukanlah matriks

hasil dari $f(A)$

Jawab

$$f(A) = A^2 - 3A$$

$$f(A) = A \cdot A - 3A$$

$$f(A) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} - 3 \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$$

$$f(A) = \begin{bmatrix} 4+0 & 2-3 \\ 0-0 & 0+9 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 0 & -9 \end{bmatrix}$$

$$f(A) = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 9 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 0 & -9 \end{bmatrix}$$

$$f(A) = \begin{bmatrix} 4-6 & -1-3 \\ 0-0 & 9-(-9) \end{bmatrix}$$

$$f(A) = \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ 0 & 18 \end{bmatrix}$$

06. Tentukanlah nilai x , y dan z jika $\begin{bmatrix} 2y & 2x \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x+4 & -10 \\ -8 & z \end{bmatrix}$

Jawab

$$\begin{bmatrix} 2y & 2x \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x+4 & -10 \\ -8 & z \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 6y+2x & -2y-4x \\ -9+1 & 3-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x+4 & -10 \\ -8 & z \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 6y+2x & -2y-4x \\ -8 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x+4 & -10 \\ -8 & z \end{bmatrix}$$

Maka : $z = 1$ (1)

$$-2y - 4x = -10$$

$$y + 2x = 5$$

$$y = 5 - 2x$$
 (2)

$$6y + 2x = 3x + 4$$

$$6y + 2x - 3x = 4$$

$$6y - x = 4$$
 (3)

$$(2)(3) \quad 6(5 - 2x) - x = 4$$

$$30 - 12x - x = 4$$

$$-13x = -26 \quad \text{maka} \quad x = 2$$

$$y = 5 - 2(2) = 1$$

$$z = 1$$