

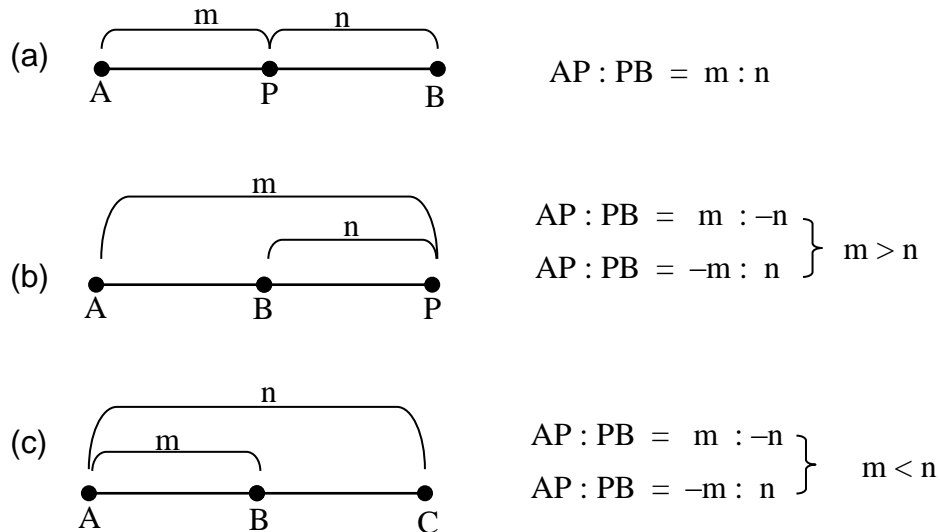
VEKTOR

C. Perbandingan vektor

(1) Tinjauan Geometris Perbandingan vektor

Dalam operasi aljabar vektor kita tidak mengenal pembagian dua vektor. Dalam hal ini kita hanya menentukan perbandingan panjang dua vektor, atau perbandingan ruas garis.

Secara geometris terdapat tiga aturan perbandingan ruas garis, yaitu :



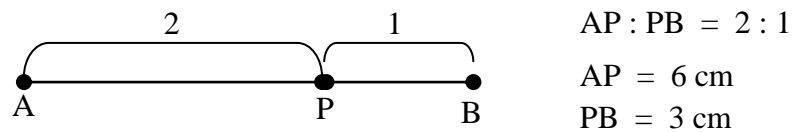
Catatan : Bentuk (a) dapat dinyatakan dalam kalimat : “P membagi AB di dalam dengan perbandingan $m : n$ ”

Bentuk (b) dan (c) dapat dinyatakan dalam kalimat : “P membagi AB di luar dengan perbandingan $m : n$ ”

Untuk lebih jelasnya ikutilah contoh soal berikut ini :

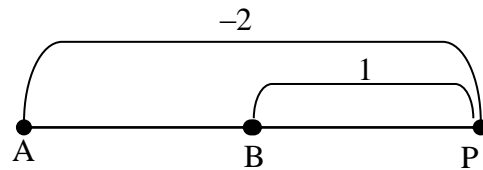
01. Diketahui sebuah ruas garis AB dengan panjang 9 cm. Jika $AP : PB = 2 : 1$, gambarlah letak titik P

Jawab



02. Diketahui sebuah ruas garis AB dengan panjang 4 cm. Jika $AP : PB = -2 : 1$, gambarlah letak titik P

Jawab



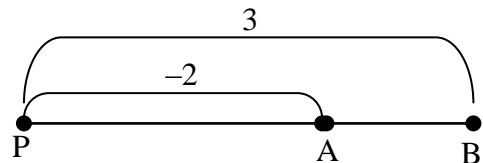
$$AP : PB = -2 : 1$$

$$AB = 4 \text{ cm}$$

$$BP = 4 \text{ cm}$$

03. Diketahui sebuah ruas garis AB dengan panjang 4 cm. Jika P membagi AB di luar dengan perbandingan panjang 2 : 3, maka gambarkanlah letak titik P

Jawab



$$AP : PB = -2 : 3$$

$$AB = 4 \text{ cm}$$

$$AP = 8 \text{ cm}$$

(2) Tinjauan Analitis Perbandingan Vektor

Vektor posisi adalah vektor yang berpangkal di $O(0,0)$ dan dilambangkan dengan satu huruf kecil, sehingga

$$\left. \begin{array}{l} O(0, 0, 0) \\ A(a_1, a_2, a_3) \end{array} \right\} \overline{OA} = \vec{a} = a_1 \vec{i} + a_2 \vec{j} + a_3 \vec{k} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$$

Sebagai contoh diketahui $A(2, -3, 4)$ maka vektor posisi \vec{a} adalah $\vec{a} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + 4\vec{k}$

Jika $\overline{OA} + \overline{AB} = \overline{OB}$

$$\vec{a} + \overline{AB} = \vec{b}$$

$$\overline{AB} = \vec{b} - \vec{a} \dots\dots\dots (1)$$

Sebagai contoh jika diketahui $A(2, -1, 6)$ dan $B(-3, 2, 4)$ maka :

$$\overline{AB} = \vec{b} - \vec{a} = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix} = -5\vec{i} + 3\vec{j} - 2\vec{k}$$

Menurut rumus perbandingan ruas garis

$$AP : PB = m : n$$

$$n\overline{AP} = m\overline{PB}$$

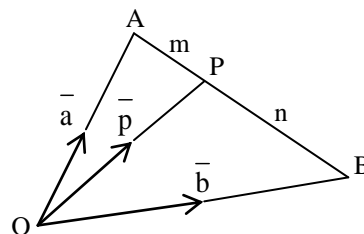
$$n(\vec{p} - \vec{a}) = m(\vec{b} - \vec{p})$$

$$n\vec{p} - n\vec{a} = m\vec{b} - m\vec{p}$$

$$n\vec{p} + m\vec{p} = m\vec{b} + n\vec{a}$$

$$(n + m)\vec{p} = n\vec{a} + m\vec{b}$$

$$\vec{p} = \frac{n\vec{a} + m\vec{b}}{m + n} \dots\dots\dots (2)$$



Sehingga untuk $A(x_A, y_A, z_A)$ dan $B(x_B, y_B, z_B)$ serta $P(x_P, y_P, z_P)$ terletak segaris dengan AB dan memiliki perbandingan $AP : PB = m : n$, maka berlaku :

$$x_p = \frac{n \cdot x_A + m \cdot x_B}{m+n}, \quad y_p = \frac{n \cdot y_A + m \cdot y_B}{m+n} \quad \text{dan} \quad z_p = \frac{n \cdot z_A + m \cdot z_B}{m+n}$$

Untuk lebih jelasnya ikutilah contoh soal berikut ini :

04. Misalkan P, Q dan R adalah tiga titik yang segaris dan berlaku $PR : RQ = -2 : 5$ maka nyatakanlah vektor \vec{r} dalam \vec{p} dan \vec{q}

Jawab

$$PR : RQ = -2 : 5$$

$$\vec{r} = \frac{5 \cdot \vec{p} + (-2) \cdot \vec{q}}{5 + (-2)}$$

$$\vec{r} = \frac{5 \cdot \vec{p} - 2 \cdot \vec{q}}{3}$$

$$\vec{r} = \frac{1}{3} (5 \cdot \vec{p} - 2 \cdot \vec{q})$$

05. Jika titik A, B dan P kolinier dengan perbandingan $AP : PB = -4 : 3$ maka nyatakanlah vektor \vec{a} dalam \vec{p} dan \vec{b}

Jawab

$$AP : PB = -4 : 3$$

$$\vec{r} = \frac{3 \cdot \vec{a} + (-4) \cdot \vec{b}}{-4 + 3}$$

$$\vec{r} = \frac{3 \cdot \vec{a} - 4 \cdot \vec{b}}{-1}$$

$$-\vec{r} = 3 \cdot \vec{a} - 4 \cdot \vec{b}$$

$$3 \cdot \vec{a} = 4 \cdot \vec{b} - \vec{r}$$

$$\vec{a} = \frac{1}{3} (4 \cdot \vec{b} - \vec{r})$$

06. Jika titik A, B dan C kolinier dan berlaku $\vec{AB} = \frac{2}{5} \vec{AC}$, nyatakanlah vektor \vec{b} dalam

\vec{a} dan \vec{c}

Jawab

$$\vec{AB} = \frac{2}{5} \vec{AC}$$

$$5 \cdot \vec{AB} = 2 \cdot \vec{AC}$$

$$5(\vec{b} - \vec{a}) = 2(\vec{c} - \vec{a})$$

$$5\vec{b} - 5\vec{a} = 2\vec{c} - 2\vec{a}$$

$$5\vec{b} = 3\vec{a} + 2\vec{c} \quad \text{Jadi} \quad \vec{b} = \frac{1}{5} (3\vec{a} + 2\vec{c})$$

07. Diketahui dua titik $A(6, 5, -5)$ dan $B(2, -3, -1)$ serta titik P pada \overline{AB} sehingga $AP : PB = 3 : 1$. Tentukanlah koordinat titik P

Jawab

$$AP : PB = 3 : 1$$

$$\vec{p} = \frac{1\vec{a} + 3\vec{b}}{1+3}$$

$$\vec{p} = \frac{1}{4}(\vec{a} + 3\vec{b})$$

$$\vec{p} = \frac{1}{4} \left(\begin{bmatrix} 6 \\ 5 \\ -5 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \end{bmatrix} \right)$$

$$\vec{p} = \frac{1}{4} \left(\begin{bmatrix} 6 \\ 5 \\ -5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 \\ -9 \\ -3 \end{bmatrix} \right)$$

$$\vec{p} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 12 \\ -4 \\ -8 \end{bmatrix}$$

$$\vec{p} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Jadi koordinat $P(3, -1, -2)$

08. Diketahui titik $P(2, -1, 3)$ dan $R(2, 4, 8)$ serta titik Q pada \overline{PR} dengan perbandingan $PR : QR = 5 : 3$. Tentukanlah koordinat titik Q

Jawab

$$PR : QR = 5 : 3$$

$$PR : RQ = 5 : -3$$

$$\vec{r} = \frac{-3\vec{p} + 5\vec{q}}{-3+5}$$

$$\vec{r} = \frac{-3\vec{p} + 5\vec{q}}{2}$$

$$2\vec{r} = -3\vec{p} + 5\vec{q}$$

$$2\vec{r} + 3\vec{p} = 5\vec{q}$$

$$\vec{q} = \frac{1}{5}(3\vec{p} + 2\vec{r})$$

$$\vec{q} = \frac{1}{5} \left(3 \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 8 \end{bmatrix} \right)$$

$$\vec{q} = \frac{1}{5} \left(\begin{bmatrix} 6 \\ -3 \\ 9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \\ 16 \end{bmatrix} \right)$$

$$\vec{q} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 10 \\ 5 \\ 25 \end{bmatrix}$$

$$\vec{q} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Jadi koordinat Q(2, 1, 5)

09. Diketahui tiga titik yang segaris yaitu A(7, 7, -2) dan C(-3, 1, 4) dan B sehingga berlaku $\vec{AC} = \frac{2}{3}\vec{AB}$. Tentukanlah koordinat titik B

Jawab

$$\vec{AC} = \frac{2}{3}\vec{AB}$$

$$3\vec{AC} = 2\vec{AB}$$

$$3(\vec{c} - \vec{a}) = 2(\vec{b} - \vec{a})$$

$$3\vec{c} - 3\vec{a} = 2\vec{b} - 2\vec{a}$$

$$3\vec{c} - 3\vec{a} + 2\vec{a} = 2\vec{b}$$

$$3\vec{c} - \vec{a} = 2\vec{b}$$

$$\vec{b} = \frac{1}{2}(3\vec{c} - \vec{a})$$

$$\vec{b} = \frac{1}{2} \left(\begin{bmatrix} -3 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 7 \\ 7 \\ -2 \end{bmatrix} \right)$$

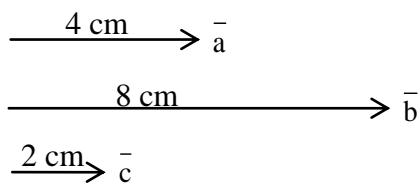
$$\vec{b} = \frac{1}{2} \left(\begin{bmatrix} -9 \\ 3 \\ 12 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 7 \\ 7 \\ -2 \end{bmatrix} \right)$$

$$\vec{b} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -16 \\ -4 \\ 14 \end{bmatrix}$$

$$\vec{b} = \begin{bmatrix} -8 \\ -2 \\ 7 \end{bmatrix}$$

Jadi koordinat B(-8, -2, 7)

Dua buah vektor dikatakan segaris (kolinier) jika kedua vektor itu sejajar atau terletak pada satu garis yang sama.. Misalkan terdapat tiga vektor yang segaris, seperti gambar berikut ini



Dari gambar tersebut didapat:

$$\vec{b} = 2\vec{a}$$

$$\vec{c} = \frac{1}{2}\vec{a}$$

Jadi vektor \vec{a} dan \vec{b} dikatakan segaris jika terdapat nilai $k \in \text{Real}$ sehingga $\vec{a} = k \cdot \vec{b}$. Sedangkan tiga titik A, B dan C dikatakan segaris jika terdapat $k \in \text{Real}$ sehingga $\vec{AB} = k \cdot \vec{AC}$

Untuk lebih jelasnya ikutilah contoh soal berikut ini :

10. Manakah diantara ketiga vektor berikut ini merupakan vektor yang segaris

$$\vec{a} = 2\vec{i} - 4\vec{j} + 5\vec{k}, \vec{b} = 8\vec{i} - 16\vec{j} + 10\vec{k} \text{ dan } \vec{c} = 6\vec{i} - 12\vec{j} + 15\vec{k}$$

Jawab

Karena $\vec{b} = 2\vec{a}$ maka \vec{a} dan \vec{b} segaris

\vec{a} dan \vec{c} tidak segaris serta \vec{b} dan \vec{c} juga tidak segaris

11. Jika vektor $\vec{a} = 2\vec{i} - \vec{j} + x\vec{k}$ dan $\vec{b} = -6\vec{i} + y\vec{j} + 12\vec{k}$ segaris, maka tentukanlah nilai x dan y

Jawab

Syarat segaris $\vec{a} = k \cdot \vec{b}$

$$\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ x \end{bmatrix} = k \begin{bmatrix} -6 \\ y \\ 12 \end{bmatrix}$$

Maka : $2 = -6k$. Sehingga $k = -\frac{1}{3}$

$$-1 = ky$$

$$-1 = -\frac{1}{3}y \text{ sehingga } y = 3$$

$$x = k(12)$$

$$x = -\frac{1}{3}(12) \text{ sehingga } x = -4$$

12. Diketahui tiga titik yang segaris (kolinier) yaitu A(2, -1, p), B(8, -9, 8) dan C(q, 3, 2). Tentukanlah nilai p dan q

Jawab

Syarat segaris $\overline{AB} = k \cdot \overline{AC}$

$$\begin{bmatrix} 8-2 \\ -9-(-1) \\ 8-p \end{bmatrix} = k \begin{bmatrix} q-2 \\ 3-(-1) \\ 2-p \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 6 \\ -8 \\ 8-p \end{bmatrix} = k \begin{bmatrix} q-2 \\ 4 \\ 2-p \end{bmatrix}$$

Maka : $-8 = 4k$. Sehingga $k = -2$

$$6 = k(q-2)$$

$$6 = -2(q-2)$$

$$6 = -2q + 4$$

$$2 = -2q \quad \text{sehingga } q = -1$$

$$8-p = k(2-p)$$

$$8-p = -2(2-p)$$

$$8-p = -4 + 2p$$

$$8 + 4 = p + 2p$$

$$12 = 3p \quad \text{sehingga } p = 4$$