

# M A T R I K S

## B. Penjumlahan dan Pengurangan Matriks

Terdapat beberapa operasi aljabar yang dapat dilakukan pada matriks, diantaranya adalah penjumlahan dan pengurangan. Namun dua matriks dapat dijumlah/dikurang jika kedua matriks itu ordonya sama.

Misalkan A dan B adalah dua matriks yang ordonya sama serta  $A + B = C$ , maka C adalah matriks hasil yang didapat dengan cara menjumlahkan elemen-elemen yang seletak pada A dan B.

$$\text{Contoh : } \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 6 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \\ -3 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+3 & 0+4 \\ -2+5 & 6+6 \\ 3+(-3) & 1+(-2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 3 & 12 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Matriks nol adalah matriks yang semua elemennya nol (dilambangkan dengan O). Matriks ini adalah matriks identitas penjumlahan, sehingga  $A + 0 = 0 + A = A$

Contoh

Diketahui  $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}$ , maka matriks identitas dari A adalah  $O = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ , sehingga

$$A + O = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -5 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3+0 & 4+0 \\ -5+0 & 1+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -5 & 1 \end{bmatrix} = A$$

Jika A suatu matriks, maka matriks lawan dari A adalah matriks  $-A$  yakni sebuah matriks yang unsur-unsurnya merupakan lawan dari unsur-unsur matriks A. Dalam hal ini berlaku sifat  $A + (-A) = O$ .

Contoh

Diketahui  $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -5 & 0 \end{bmatrix}$ , maka lawan dari matriks A adalah  $-A = \begin{bmatrix} -3 & -4 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$ , sehingga

$$A + (-A) = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -5 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 & -4 \\ 5 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3+(-3) & 4+(-4) \\ -5+(5) & 0+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = O$$

Perkalian suatu bilangan real k dengan matriks A adalah suatu matriks kA yang didapat dengan cara mengalikan setiap unsur matriks A dengan k

Contoh

$$\text{Diketahui } A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -5 & 0 \end{bmatrix}, \text{ maka } 2A = 2 \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -5 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ -10 & 0 \end{bmatrix}$$

Misalkan A, B dan C adalah matriks-matriks yang ordonya sama, dan k adalah bilangan real, maka terdapat sifat-sifat yang berlaku pada penjumlahan dan pengurangan matriks

1.  $A + B = B + A$
2.  $(A + B) + C = A + (B + C)$
3.  $k(A + B) = kA + kB$
4.  $kA + mA = (k + m)A$

Untuk pemahaman lebih lanjut akan diberikan beberapa contoh soal serta uraian jawabannya.

01. Diketahui matriks  $A = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ -2 & -6 \end{bmatrix}$  dan  $C = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$  maka

tentukanlah hasil dari

- (a)  $A + B - C$
- (b)  $A - (B + C)$
- (c)  $(A - B) - (A - C) + (B + C)$

Jawab

$$\begin{aligned}
 \text{(a) } A + B - C &= \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ -2 & -6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 2+0-(-3) & -5+4-4 \\ 3+(-2)-2 & -1+(-6)-(-2) \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 5 & -5 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{(b) } A - (B + C) &= \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} - \left( \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ -2 & -6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \right) \\
 &= \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0+(-3) & 4+4 \\ -2+2 & -6+(-2) \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -3 & 8 \\ 0 & -8 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 2-(-3) & -5-8 \\ 3-0 & -1-(-8) \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 5 & -13 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{(c) } (A - B) - (A - C) + (B + C) &= A - B - A + C + B + C \\
 &= 2C \\
 &= 2 \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & 8 \\ 4 & -4 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

02. Tentukan hasil dari

$$(a) 4 \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 0 & 8 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$(b) 3 \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -6 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$$

Jawab

$$\begin{aligned} (a) & 4 \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 0 & 8 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 8 & 4 \\ -12 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -4 & 6 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 8+2-(-4) & 4+(-1)-6 \\ -12+0-0 & 0+4-(-2) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 14 & -3 \\ -12 & 6 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (b) & 3 \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -6 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 4 & -3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -15 & 6 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -6 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 8 & -6 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -15-(-6)-2 & 6-1-(-2) \\ 3-2-8 & 0-(-3)-(-6) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -11 & 7 \\ -7 & 9 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

03. Tentukanlah matriks X jika :

$$(a) 3X - 2 \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 6 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 6 & 20 \\ -12 & 2 \end{bmatrix}$$

$$(b) 4X + 2 \begin{bmatrix} 3 & 0 & -5 \\ -2 & -4 & 1 \end{bmatrix} - 3 \begin{bmatrix} 4 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 1 \\ -2 & 3 & 0 \end{bmatrix} + 2X$$

Jawab

$$(a) 3X - 2 \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 6 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 6 & 20 \\ -12 & 2 \end{bmatrix}$$

$$3X - \begin{bmatrix} 6 & -4 \\ 12 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 10 \\ -6 & 1 \end{bmatrix}$$

$$3X = \begin{bmatrix} 3 & 10 \\ -6 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 & -4 \\ 12 & 2 \end{bmatrix}$$

$$3X = \begin{bmatrix} 9 & 6 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$$

$$X = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 9 & 6 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(b) \quad 4X + 2 \begin{bmatrix} 3 & 0 & -5 \\ -2 & -4 & 1 \end{bmatrix} - 3 \begin{bmatrix} 4 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 1 \\ -2 & 3 & 0 \end{bmatrix} + 2X$$

$$4X + \begin{bmatrix} 6 & 0 & -10 \\ -4 & -8 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 12 & -6 & 9 \\ 0 & 3 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 1 \\ -2 & 3 & 0 \end{bmatrix} + 2X$$

$$4X + \begin{bmatrix} -6 & 6 & -19 \\ -4 & -11 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 1 \\ -2 & 3 & 0 \end{bmatrix} + 2X$$

$$4X - 2X = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 1 \\ -2 & 3 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -6 & 6 & -19 \\ -4 & -11 & -4 \end{bmatrix}$$

$$2X = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 20 \\ 2 & 14 & 4 \end{bmatrix}$$

$$X = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 10 & 0 & 20 \\ 2 & 14 & 4 \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 10 \\ 1 & 7 & 2 \end{bmatrix}$$

04. Tentukanlah nilai x, y dan z jika  $\begin{bmatrix} x & 4 \\ 3x & 6 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 6y & 10 \\ 4 & 2z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3+4x & 9 \\ 8 & 2y \end{bmatrix}$

Jawab

$$\begin{bmatrix} x & 4 \\ 3x & 6 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 6y & 10 \\ 4 & 2z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3+4x & 9 \\ 8 & 2y \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x & 4 \\ 3x & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3y & 5 \\ 2 & z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3+4x & 9 \\ 8 & 2y \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x+3y & 9 \\ 3x+2 & 6+z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3+4x & 9 \\ 8 & 2y \end{bmatrix}$$

Maka  $3x + 2 = 8$   
 $3x = 6$   
 $x = 2$

$$x + 3y = 3 + 4x$$

$$x - 4x = 3 - 3y$$

$$-2x = 3 - 3y$$

$$-2(3) = 3 - 3y$$

$$-6 = 3 - 3y$$

$$3y = 3 + 6$$

$$3y = 9 \quad \text{maka } y = 3$$

$$6 + z = 2y$$

$$6 + z = 2(3)$$

$$6 + z = 6$$

$$z = 6 - 6$$

$$z = 0$$