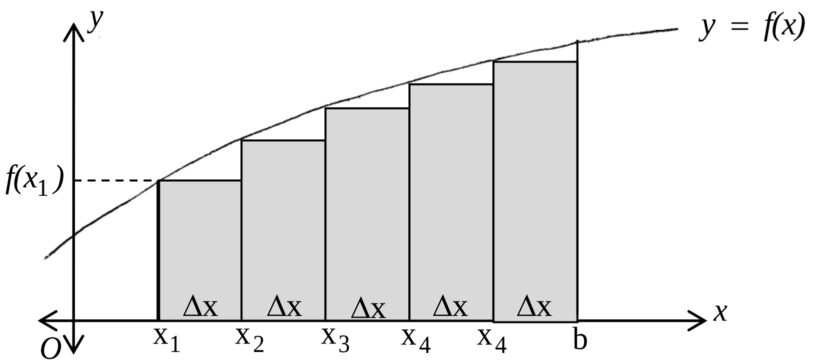
INTEGRAL LANJUTAN

A. Pengertian Integral Tentu



Pada gambar di atas, misalkan luas daerah yang dibatasi oleh kurva y = f(x) dan sumbu-X, dalam interval x= a dan x = b dinamakan D, maka D dapat dicari pendekatannya dengan menghitung luas persegi pangjang-persegi panjang yang melingkupinya (seperti gambar di atas).

Dari gambar di atas, lebar persegi panjang- persegi panjang dibuat sama yakni Δx sedangkan panjangnya $f(x_1)$ (dimana i = 1, 2, 3 dan 4), sehinga luas persegi panjang keseluruhan dirumuskan :

L = $f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + f(x_3)\Delta x + f(x_4)\Delta x$

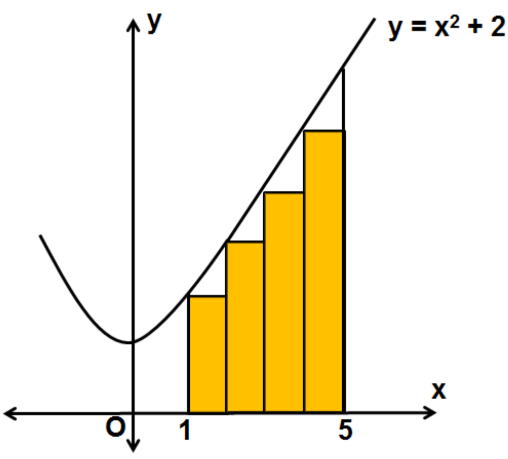
Jika persegi panjang tersebut dibuat sebanyak n buah, maka diperoleh

L = $f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + f(x_3)\Delta x + \ldots + f(x_n)\Delta x$

L = $\sum_{i=1}^{n} f(x_n)\Delta x$

Pendekatan mentukan luas dengan menggunakan deret diatas dinamakan pendekatan Rienman. Tentu saja luas L yang didapat tidak akan sama dengan luas D yang sebenarnya. Semakin banyak persegi panjang yang digunakan, akan membuat nilai L semakin mendekati luas D yang sebenarnya.

Sebagai contoh akan dihitung luas daerah yang dibatasi oleh kurva $y = x^2 + 2$ dan sumbu-X dalam interval x = 1 dan x = 5 menggunakan pendekatan deret Rieman dengan empat persegi panjang



Jawab

L = f(1)Δx + f(2)Δx + f(3)Δx + f(4)Δx

L = (3)(1) + (6)(1) + (11)(1) + (18)(1)

L = 38 satuan luas

Persegi panjang	Δx	Luas
4	1	38
8	0,5	43,500
16	0,25	46,375
32	0,125	47,843
64	0,0625	48,585
128	0,0313	48,958
256	0,00156	49,145

Jika banyaknya persegipanjang ditambah menjadi 8, 16, 32 dan seterusnya, maka nilai L yang didapat akan mendekati luas yang sebenarnya. Pada tabel disamping tampak bahwa jika persegi panjang dibuat sebanyak 256 buah maka luasnya menjadi 49,145 satuan luas.

Jika persegi panjang itu dibuat sebanyak tak hingga buah, maka lebar persegi panjang, yakni Δx menjadi sangat kecil (mendekati nol) dan persegi panjang-persegi panjang itu hampir berbentuk garis yang jumlahnya tak hingga. Sehingga luas L dapat dianggap sama dengan luas D.

Dengan demikian : D = $\lim_{\Delta x \to 0} it \sum_{i=1}^{n} f(x_n)\,\Delta x$ atau D = $\lim_{n \to \infty} it \sum_{i=1}^{n} f(x_n)\,\Delta x$ ……….(1)

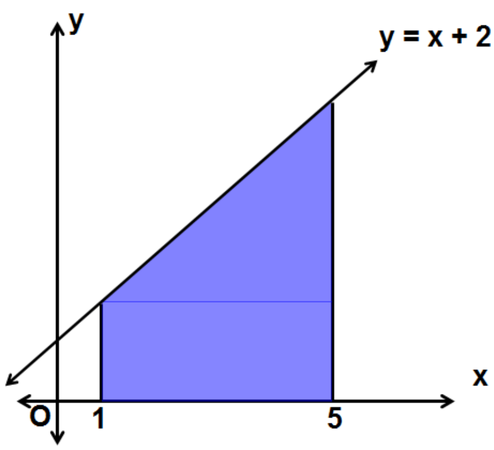
Jika x_1 = a dan x_n mendekati b, maka bentuk (1) di atas dapat dinyakakan dalam bentuk integral tentu, yakni : D = $\int_a^b f(x)dx$

dengan aturan :

Jika $\int f(x)dx$ = F(x) + C maka $\int_a^b f(x)dx$ = $F(x)\Big|_a^b$ = F(b) – F(a) ………………… (2)

Untuk lebih jelasnya akan diuraikan dalam contoh soal berikut ini :

01. Tentukanlah luas daerah yang diarsir pada gambar disamping dengan pendekatan integral dan dengan rumus luas



Jawab

L = $\int_1^5 (x+2)\,dx$

L = $\frac{1}{2}x^2 + 2x \Big|_1^5$

L = $\left(\frac{1}{2}(5)^2 + 2(5)\right) - \left(\frac{1}{2}(1)^2 + 2(1)\right)$

L = 20 satuan luas

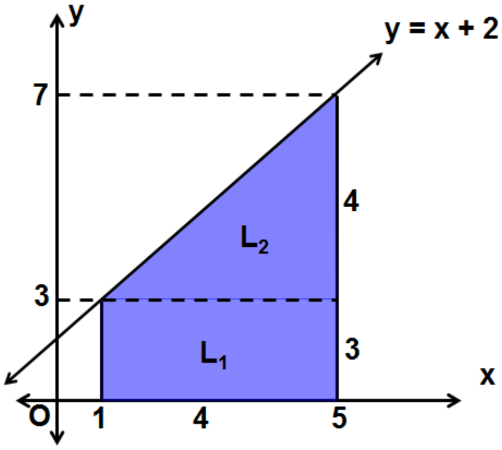
Dengan rumus luas didapat

L_1 = 4 x 3 = 12 satuan

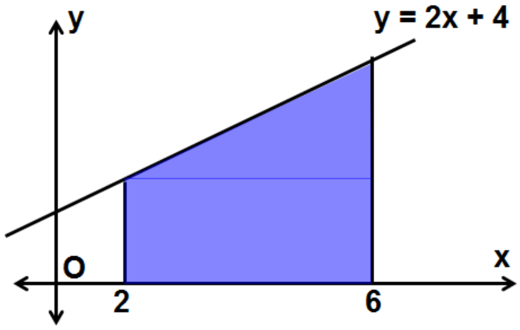
$L_2 = \frac{1}{2}(4 \times 4) = 8$ satuan

Maka luas daerah yang diarsir adalah :

L = 12 + 8 = 20 satuan luas



02. Tentukan luas daerah yang diarsir pada gambar berikut jika dihitung dengan pendekatan :
(a) Integral tentu
(b) Deret Rienman menggunakan 8 persegi panjang



Jawab

(a) $L = \int_2^6 (2x + 4)\,dx$

$L = x^2 + 4x \Big|_2^6$

$L = [6^2 + 4(6)] - [2^2 + 4(2)]$

$L = [60] - [12]$

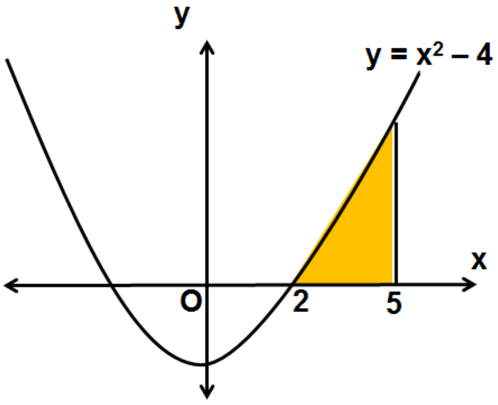
L = 48 satuan luas

(b) Pendekatan luas dengan menggunakan deret Rienman menggunakan 8 persegi panjang dapat dilihat pada tabel berikut ini :

n	x_n	$f(x_n)$	Δx	$f(x_n)\Delta x$
1	2	8	0,5	4,0
2	2,5	9	0,5	4,5
3	3	10	0,5	5,0
4	3,5	11	0,5	5,5
5	4	12	0,5	6,0
6	4,5	13	0,5	6,5
7	5	14	0,5	7,0
8	5,5	15	0,5	7,5
				46

Luas daerah yang didapat adalah 46 satuan luas. Perbedaan angka ini karena persegi panjang yang dipakai belum cukup mewakili luas secara keseluruhan.

03. Tentukan luas daerah yang diarsir pada gambar berikut jika dihitung dengan pendekatan :
(a) Integral tentu
(b) Deret Rienman menggunakan 6 persegi panjang



Jawab

(a) $L = \int_2^5 (x^2 - 4)\,dx$

$L = \frac{1}{3}x^3 - 4x \Big|_2^5$

$L = \left(\frac{1}{3}(5)^3 - 4(5)\right) - \left(\frac{1}{3}(2)^3 - 4(2)\right)$

$L = \frac{125}{3} - 20 - \frac{8}{3} + 8$

L = 89/3 = satuan luas

(b) Pendekatan luas dengan menggunakan deret Rienman menggunakan 6 persegi panjang dapat dilihat pada tabel berikut ini :

n	x_n	$f(x_n)$	Δx	$f(x_n)\Delta x$
1	2	0	0,5	0,000
2	2,5	2,25	0,5	1,125
3	3	5,00	0,5	2,500
4	3,5	8,25	0,5	4,125
5	4	12,00	0,5	6,000
6	4,5	16,25	0,5	8,125
				21,875

Luas daerah yang didapat adalah 21,875 satuan luas. Perbedaan angka ini karena persegi panjang yang dipakai belum cukup mewakili luas secara keseluruhan.

04. Hitunglah $\int_2^3 (12x^2 - 8x + 1)\,dx$

Jawab

$$\int_2^3 (12x^2 - 8x + 1)\,dx = \frac{12}{3}x^3 - \frac{8}{2}x^2 + x$$

$$= 4x^3 - 4x^2 + x \Big|_2^3$$

$= [4(3)^3 – 4(3)^2 +3] – [4(2)^3 – 4(2)^2 +2]$

$= [108 – 36 + 3] – [32 – 16 + 2]$

$= 75 – 18$

$= 57$

05. Hitunglah $\int_{-2}^{2} (8x^3 - 12x^2)\, dx$

Jawab

$$\int_{-2}^{2} (8x^3 - 12x^2)\, dx = \frac{8}{4}x^4 - \frac{12}{3}x^3 \Big|_{-2}^{2}$$

$$= 2x^4 - 4x^3 \Big|_{-2}^{2}$$

$= [2(2)^4 – 4(2)^3] – [2(–2)^4 – 4(–2)^3]$

$= [32 – 32] – [32 + 32]$

$= 0 – 64$

$= –64$

06. Hitunglah Hitunglah $\int_{0}^{3} (4x^2 - 6x + 2)dx$

Jawab

$$\int_{0}^{3} (4x^2 - 6x + 2)dx = \frac{4}{3}x^3 - \frac{6}{2}x^2 + 2x \Big|_{0}^{3}$$

$$= \frac{4}{3}x^3 - 3x^2 + 2x \Big|_{0}^{3}$$

$$= \left(\frac{4}{3}[3]^3 - 3[3]^2 + 2[3]\right) - \left(\frac{4}{3}(0)^3 - 3[0]^2 + 2(0)\right)$$

= (36 – 27 + 6) – (0)

= 15

Mengingat integral tentu dipeoleh dari konsep limit dan notasi sigma, maka sifat-sifat yang berlaku pada integral tentu sama dengan sifat-sifat yang berlaku pada limit dan notasi sigma tentu, yaitu :

(1) $\int_a^b k.f(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$

(2) $\int_a^b [\,f(x)+g(x)\,]\,dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)\,dx$

(3) $\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx$ dimana a < b < c

(4) $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

(5) $\int_a^a f(x)dx = 0$

Untuk lebih jelasnya akan diuraikan dalam contoh soal berikut ini :

07. Hitunglah $\int_0^4 (26x^2 - 18x + 14)dx - \int_0^4 (23x^2 - 8x + 12)dx = \ldots$

Jawab

$\int_0^4 (26x^2 - 18x + 14)dx - \int_0^4 (23x^2 - 8x + 12)dx$

$= \int_0^4 (26x^2 - 18x + 14 - 23x^2 + 8x - 12)dx$

$= \int_0^4 (3x^2 - 10x + 2)dx$

$= \frac{3}{3}x^3 - \frac{10}{2}x^2 + 2x$

$= x^3 - 5x^2 + 2x \Big|_0^4$

$= \left(4^3 - 5(4)^2 + 2(4)\right) - \left(0^3 - 5(0)^2 + 2(0)\right)$

= (64 – 60 +8) – (0)

= 12

08. Hitunglah $\int_0^3 5(x^2 - 4x + 3)dx$

Jawab

$\int_0^3 5(x^2 - 4x + 3)dx = 5\int_0^3 5(x^2 - 4x + 3)dx$

$= 5\left|\frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x\right|_0^3$

$= 5\left\{\left(\frac{1}{3}[3]^3 - 2[3]^2 + 3[2]\right) - \left(\frac{1}{3}(0)^3 - 2[0]^2 + 3(0)\right)\right\}$

$= 5\,\{(9-18+6)-(0)\}$
$= 5(-3)$
$= -15$

09. Hitunglah $\int_0^3 (9x^2+4x-2)dx + \int_3^5 (9x^2+4x-5)dx = \ldots$

Jawab

$\int_0^3 (9x^2+4x-2)dx + \int_3^5 (9x^2+4x-5)dx$

$= \int_0^3 (9x^2+4x-5+3)dx + \int_3^5 (9x^2+4x-5)dx$

$= \int_0^3 (9x^2+4x-5)dx + \int_0^3 3\,dx + \int_3^5 (9x^2+4x-5)dx$

$= \int_0^5 (9x^2+4x-5)dx + \int_0^3 3\,dx$

$= \frac{9}{3}x^3 + \frac{4}{2}x^2 - 5x \Big|_0^5 + 3x \Big|_0^3$

$= 3x^3 + 2x^2 - 5x \Big|_0^5 + 3x \Big|_0^3$

$= \left(3(5)^3 + 2(5)^2 - 5(5)\right) - \left(3(0)^3 + 2(0)^2 - 5(0)\right) + (3(3)) - (3(0))$

= (375 + 50 – 25) – (0) + (9) – (0)

= 400 + 9

= 409

10. Hitunglah $\int_{-2}^{1} [\,3x^2 - 4x + 2\,]\,dx - \int_{3}^{1} [\,3x^2 - 4x + 2\,]\,dx$

Jawab

$\int_{-2}^{1} [\,3x^2 - 4x + 2\,]\,dx - \int_{3}^{1} [\,3x^2 - 4x + 2\,]\,dx$

$= \int_{-2}^{1} [\,3x^2 - 4x + 2\,]\,dx + \int_{1}^{3} [\,3x^2 - 4x + 2\,]\,dx$

$= \int_{-2}^{3} [\,3x^2 - 4x + 2\,]\,dx$

$= \frac{3}{3}x^3 - \frac{4}{2}x^2 + 2x \Big|_{-2}^{3}$

$$= \left. x^3 - 2x^2 + 2x \right|_{-2}^{3}$$

$$= [(3)^3 - 2(3)^2 + 2(3)] - [(-2)^3 - 2(-2)^2 + 2(-2)]$$

= [27 – 18 +6] – [–8 – 8 – 4]

= 15 – (–20)

= 35

11. $\int_{-1}^{2} [\, 2x^2 - 6x - 5 \,]\, dx \;+\; \int_{-1}^{4} [\, x^2 + 4x + 2 \,]\, dx \;-\; \int_{4}^{2} [\, 2x^2 - 6x - 5 \,]\, dx$ = ……

Jawab

$$\int_{-1}^{2} [\, 2x^2 - 6x - 5 \,]\, dx + \int_{-1}^{4} [\, x^2 + 4x + 2 \,]\, dx - \int_{4}^{2} [\, 2x^2 - 6x - 5 \,]\, dx$$

$$= \int_{-1}^{2} [\, 2x^2 - 6x - 5 \,]\, dx + \int_{-1}^{4} [\, x^2 + 4x + 2 \,]\, dx + \int_{2}^{4} [\, 2x^2 - 6x - 5 \,]\, dx$$

$$= \int_{-1}^{4} [\, 2x^2 - 6x - 5 \,]\, dx + \int_{-1}^{4} [\, x^2 + 4x + 2 \,]\, dx$$

$$= \int_{-1}^{4} ([\, 2x^2 - 6x - 5 \,] + [\, x^2 + 4x + 2 \,])\, dx$$

$$= \int_{-1}^{4} ([3x^2 - 2x - 3)\, dx$$

$$= \left. \frac{3}{3}x^3 - \frac{2}{2}x^2 - 3x \right|_{-1}^{4}$$

$$= \left. x^3 - x^2 - 3x \right|_{-1}^{4}$$

$$= [(4)^3 - (4)^2 - 3(4)] - [(-1)^3 - (-1)^2 - 3(-1)]$$

= [64 – 16 – 12] – [–1 – 1 + 3]

= 36 – 1

= 35