# TURUNAN FUNGSI ALJABAR

## B. Pengembangan Rumus Turunan Fungsi Aljabar

Jika u(x) dan v(x) adalah fungsi-fungsi yang terdefinisi pada bilangan real, dan u'(x) dan v'(x) adalah turunannya, maka kita dapat menurunkan rumus turunan hasil kali, hasil bagi dua fungsi dan pemangkatan fungsi, yakni sebagai berikut :

Jika f(x) = u(x).v(x) maka :

$$f'(x) = \underset{h\to 0}{\text{Limit}} \frac{u(x+h).v(x+h) - u(x).v(x)}{h}$$

$$f'(x) = \underset{h\to 0}{\text{Limit}} \frac{u(x+h).v(x+h) - u(x+h).v(x) + u(x+h)v(x) - u(x)v(x)}{h}$$

$$f'(x) = \underset{h\to 0}{\text{Limit}} \frac{u(x+h)[v(x+h) - v(x)] + [u(x+h) - u(x)]v(x)}{h}$$

$$f'(x) = \underset{h\to 0}{\text{Limit}} \frac{u(x+h)[v(x+h) - v(x)]}{h} + \underset{h\to 0}{\text{Limit}} \frac{[u(x+h) - u(x)]v(x)}{h}$$

$$f'(x) = \underset{h\to 0}{\text{Limit}}\, u(x+h) \,.\, \underset{h\to 0}{\text{Limit}} \frac{v(x+h) - v(x)}{h} + \underset{h\to 0}{\text{Limit}} \frac{u(x+h) - u(x)}{h} \,.\, \underset{h\to 0}{\text{Limit}}\, v(x)$$

$$f'(x) = \underset{h\to 0}{\text{Limit}}\, u(x+h) \,.\, v'(x) + u'(x) \,.\, \underset{h\to 0}{\text{Limit}}\, v(x)$$

$$f'(x) = u(x+0) \,.\, v'(x) + u'(x) \,.\, v(x)$$

$$f'(x) = u(x) \,.\, v'(x) + u'(x) \,.\, v(x)$$

Jadi dapat disimpulkan

$$\boxed{\text{Jika } y = u \,.\, v \quad \text{maka} \quad y' = u'v + u.v'}$$

Untuk turunan dari perkalian tiga fungsi u(x), v(x) dan w(x), dapat diuraikan sebagai berikut :

Misalkan y = u.v.w

Maka : y' = (uv)'.w + (uv).w'

y' = (u'v + u.v').w + (uv).w'

y' = u'v.w + u.v'.w + u.v.w'

Jika $y = \frac{u}{v}$ maka u = v.y

Sehingga : u' = v'.y + v.y'

v.y' = u' – v'.y

$$v.y' = u' - v'\left(\frac{u}{v}\right)$$

$$v.y' = u'\left(\frac{v}{v}\right) - v'\left(\frac{u}{v}\right)$$

$$v.y' = \frac{u'v}{v} - \frac{u.v'}{v}$$

$$y' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

Jadi dapat disimpulkan

$$\boxed{\text{Jika } y = \frac{u}{v} \quad \text{maka} \quad y' = \frac{u'v - uv'}{v^2}}$$

Untuk pengembangan rumus turunan pada operasi pemangkatan fungsi, akan dijelaskan dengan ilustrasi berikut ini :

Jika $y = u^4$ artinya $y = u.u.u.u$ (u sebanyak 4 faktor)

Maka $y' = u'.u.u.u + u.u'.u.u + u.u.u'.u + u.u.u.u'$ (sebanyak 4 suku)

$y' = u^3.u' + u^3.u' + u^3.u' + u^3.u'$

$y' = 4u^3.u'$

Dari uraian di atas dapat digeneralisasikan aturan sebagai berikut

Jika $y = u^n$ artinya $y = u.u.u.u.....u$ (u sebanyak n faktor)

Maka $y' = u'.u.u.....u + u.u'.u.....u + .... + u.u.u.....u'$ (sebanyak n suku)

$y' = u^{n-1}.u' + u^{n-1}.u' + u^{n-1}.u' + ... + u^{n-1}.u'$

$y' = n\,u^{n-1}.u'$

Jadi dapat disimpulkan

$$\boxed{\text{Jika } y = u^n \quad \text{maka} \quad y' = n\,u^{n-1}.u'}$$

Untuk lebih jelasnya ikutilah contoh soal berikut ini :

01. Tentukanlah turunan dari setiap fungsi aljabar berikut ini :

(a) $f(x) = (x^2 - 4x)(2x + 3)$ (b) $f(x) = (2x^2 + 3x - 5)(4x - 2)$

Jawab

(a) $f(x) = (x^2 - 4x)(2x + 3)$

Misalkan $u = x^2 - 4x$ maka $u' = 2x$

$v = 2x + 3$ maka $v' = 2$

maka $f'(x) = u'.v + u.v'$

$f'(x) = (2x)(2x + 3) + (x^2 - 4x)(2)$

$f'(x) = 2x^2 + 6x + 2x^2 - 8x$

$f'(x) = 4x^2 - 2x$

(b) $f(x) = (2x^2 + 3x - 5)(4x - 2)$

Misalkan $u = 2x^2 + 3x - 5$ maka $u' = 4x + 3$

$v = 4x - 2$ maka $v' = 4$

maka $f'(x) = u'.v + u.v'$

$f'(x) = (4x + 3)(4x - 2) + (2x^2 + 3x - 5)(4)$

$f'(x) = 16x^2 - 8x + 12x - 6 + 8x^2 + 12x - 20$

$f'(x) = 24x^2 + 16x - 26$

02. Tentukanlah turunan dari setiap fungsi aljabar berikut ini :

(a) $f(x) = \dfrac{4x^2 - 5}{2x + 3}$ (b) $f(x) = \dfrac{3x^2 - 12}{2x + 4}$

Jawab

(a) $f(x) = \dfrac{4x^2 - 5}{2x + 3}$

Misalkan $u = 4x^2 - 5$ maka $u' = 8x$

$v = 2x + 3$ maka $v' = 2$

maka $f'(x) = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$

$$f'(x) = \frac{(8x)(2x + 3) - (4x^2 - 5)(2)}{(2x + 3)^2}$$

$$f'(x) = \frac{16x^2 + 24x - 8x^2 + 10}{(2x + 3)^2}$$

$$f'(x) = \frac{8x^2 + 24x + 10}{(2x + 3)^2}$$

(b) $f(x) = \dfrac{3x^2 - 12}{2x + 4}$

Misalkan $u = 3x^2 - 12$ maka $u' = 6x$

$v = 2x + 4$ maka $v' = 2$

maka $f'(x) = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$

$$f'(x) = \frac{(6x)(2x + 4) - (3x^2 - 12)(2)}{(2x + 4)^2}$$

$$f'(x) = \frac{12x^2 + 24x - 6x^2 - 24}{(2[x+2])^2}$$

$$f'(x) = \frac{6x^2 + 24x - 24}{2^2(x+2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{6(x^2 + 4x - 4)}{4(x^2 + 4x + 4)}$$

$$f'(x) = \frac{3}{2}$$

03. Tentukanlah turunan dari setiap fungsi aljabar berikut ini :

(a) $f(x) = 4(3x - 5)^2$ (b) $f(x) = 3(2x + 4)^5$

Jawab

(a) $f(x) = 4(3x - 5)^2$

Misalkan $u = 3x - 5$ maka $u' = 3$

maka $f(x) = 4u^2$

$f'(x) = 8u^1.u'$

$f'(x) = 8(3x - 5)^1(3)$

$f'(x) = 24(3x - 5)$

$f'(x) = 72x - 120$

(b) $f(x) = 3(2x + 4)^5$

Misalkan $u = 2x + 4$ maka $u' = 2$

Jadi $f(x) = 3u^5$

$f'(x) = 15u^4.u'$

$f'(x) = 15(2x + 4)^4(2)$

$f'(x) = 30(2x + 4)^4$

04. Tentukanlah turunan dari setiap fungsi aljabar berikut ini

(a) $f(x) = (2x + 5)^3.(2x - 1)$ (b) $f(x) = \left[\frac{2x - 4}{3x + 2}\right]^2$

Jawab

(a) $f(x) = (2x + 5)^3.(2x - 1)$

Misalkan $u = (2x + 5)^3$ maka $u' = 3(2x + 5)^2(2)$

$u' = 6(2x + 5)^2$

$v = 2x - 1$ maka $v' = 2$

maka $f'(x) = u'.v + u.v'$

$f'(x) = 6(2x + 5)^2(2x - 1) + (2x + 5)^3(2)$

$f'(x) = (2x + 5)^2 \{6(2x - 1) + 2(2x + 5)\}$

$f'(x) = (2x + 5)^2 \{12x - 6 + 4x + 10\}$

$f'(x) = (2x + 5)^2 \{16x + 4\}$

$f'(x) = 4(2x + 5)^2 (4x + 1)$

(b) $f(x) = \left[\frac{2x-4}{3x+2}\right]^2$

Misalkan $u = \frac{2x-4}{3x+2}$

maka $u' = \frac{2(3x+2)-(2x-4)3}{(3x+2)^2}$

$u' = \frac{6x+4-6x+12}{(3x+2)^2}$

$u' = \frac{16}{(3x+2)^2}$

Sehingga $f'(x) = 2\,u^{2-1}.u'$

$f'(x) = 2\left[\frac{2x-4}{3x+2}\right]^1 . \frac{16}{(3x+2)^2}$

$f'(x) = \frac{2(2x-4).16}{(3x+2)(3x+2)^2}$

$f'(x) = \frac{32(2x-4)}{(3x+2)^3}$

05. Tentukanlah turunan dari setiap fungsi aljabar berikut ini

(a) $f(x) = (2x - 3)^2 . \sqrt{8x-12}$

(b) $f(x) = \frac{(2x^2-8)^5}{8(x+2)^3(x-2)^3}$

Jawab

(a) $f(x) = (2x - 3)^2 . \sqrt{8x-12}$

$f(x) = (2x - 3)^2 . \sqrt{4(2x-3)}$

$f(x) = (2x - 3)^2 . 2\sqrt{2x-3}$

$f(x) = 2.(2x - 3)^2 . (2x-3)^{1/2}$

$f(x) = 2.(2x-3)^{5/2}$

Misalkan u = 2x – 3 maka u' = 2

Jadi f '(x) = $2\left(\frac{5}{2}\right)u^{3/2}.u'$

f '(x) = $5(2x-3)^{3/2}$ (2)

f '(x) = $10\sqrt{(2x-3)^3}$

(b) f(x) = $\frac{(2x^2-8)^5}{8(x+2)^3(x-2)^3}$

f(x) = $\frac{2^5(x^2-4)^5}{8(x+2)^3(x-2)^3}$

f(x) = $\frac{32(x-2)^5(x+2)^5}{8(x+2)^3(x-2)^3}$

f(x) = $4(x-2)^2(x+2)^2$

f(x) = $4(x^2-4)^2$

Misalkan u = $x^2 - 4$ maka u' = 2x

Jadi f (x) = $4u^2$

f '(x) = $4(2)u^1.u'$

f '(x) = $8(x^2 - 4).(2x)$

f '(x) = $16x(x^2 - 4)$

f '(x) = $16x^3 - 64x$

06. (a) Diketahui f(x) = $(2x^2 - 5x + 4)(x^2 - 6x + 15)$ tentukanlah f'(3)

(b) Diketahui f(x) = $\frac{x^2-3x+4}{x^2-2}$ tentukanlah f'(2)

Jawab

(a) f(x) = $(2x^2 - 5x + 4)(x^2 - 6x + 15)$

Misalkan u(x) = $2x^2 - 5x + 4$ maka u(3) = $2(3)^2 - 5(3) + 4 = 7$

u'(x) = 4x – 5 maka u'(2) = 4(3) – 5 = 7

v(x) = $x^2 - 6x + 15$ maka v(3) = $(3)^2 - 6(3) + 15 = 7$

v'(x) = 2x – 6 maka v'(2) = 2(3) – 6 = 0

Jadi f '(3) = u'(3).v(3) + u(3).v'(3)

f '(3) = (7).(7) + (7).(0)

f '(3) = 49 + 0

f '(3) = 49

(b) f(x) = $\frac{x^2 - 3x + 4}{x^2 - 2}$

Misalkan u(x) = $x^2$ – 3x + 4 maka u(2) = $(2)^2$ – 3(2) + 4 = 2

u'(x) = 2x – 3 maka u'(2) = 2(2) – 3 = 1

v(x) = $x^2$ – 2 maka v(2) = $(2)^2$ – 2 = 2

v'(x) = 2x maka v'(2) = 2(2) = 4

Jadi f '(2) = $\frac{u'(2).v(2) - u(2).v'(2)}{v(2)^2}$

f '(2) = $\frac{(1)(2) - (2)(4)}{(2)^2}$

f '(2) = $\frac{-6}{4}$

f '(2) = $-\frac{3}{2}$

Disamping ketiga aturan di atas, terdapat juga ***aturan rantai*** untuk menentukan turunan pemangkatan fungsi. Aturan ini mengambil dasar dari notasi Leibniz untuk turunan, sebagai berikut :

Misalkan f, g dan h adalah fungsi-fungsi yang terdefinisi pada x bilangan real, sehingga jika y = f { g(x) } maka aturan rantai untuk turunan fungsi y terhadap x adalah :

y' = $\frac{dy}{dx}$

y' = $\frac{df\left(g(x)\right)}{dx}$

y' = $\frac{df\left(g(x)\right)}{dg(x)}$ x $\frac{dg(x)}{dx}$

y' = f '[ g(x) ] . g'(x)

Dari sini disimpulkan bahwa

| |
|---|
| Jika y = f { g(x) } maka y' = f '[ g(x) ] . g'(x) |

Untuk lebih jelasnya ikutilah contoh soal berikut ini :

07. Dengan aturan rantai, tentukanlah turunan setiap fungsi berikut ini

(a) y = $3(x^2 - 6x + 8)^5$

(b) y = $6(2x - 1)^4 + 3(2x - 1)^2 - 6$

Jawab

(a) y = $3(x^2 - 6x + 8)^5$

Misalkan f(u) = $3u^5$ maka f '(u) = $15u^4$

u(x) = $x^2 - 6x + 8$ maka u'(x) = 2x – 6

Sehingga y' = f '(u) . u'(x)

y' = $(15u^4)(2x - 6)$

y' = $15(x^2 - 6x + 8)^4(2x - 6)$

y' = $(30x - 90)(x^2 - 6x + 8)^4$

(b) y = $6(2x - 1)^4 + 3(2x - 1)^2 - 6$

Misalkan f(u) = $3u^4 + 3u^2 - 6$ maka f '(u) = $12u^3 + 6u$

u(x) = 2x – 1 maka u'(x) = 2

Sehingga y' = f '(u) . u'(x)

y' = $(12u^3 + 6u)(2)$

y' = $2\{12(2x - 1)^3 + 6(2x - 1)\}$

y' = $24(2x - 1)^3 + 12(2x - 1)$

08. Dengan aturan rantai, tentukanlah turunan dari fungsi y = $\left(4(3x + 2)^3 - 8\right)^6$

Jawab

Misalkan f(u) = $u^6$ maka f '(u) = $6u^5$

u(h) = $4h^3 - 8$ maka u'(h) = $12h^2$

h(x) = 3x + 2 maka h'(x) = 3

Sehingga y' = f '(u) . u'(h) . h'(x)

y' = $(6u^5)(12h^2)(3)$

y' = $216h^4\left(4h^3 - 8\right)^5$

y' = $216(3x + 2)^4\left(4(3x + 2)^3 - 8\right)^5$

09. Dengan aturan rantai, tentukanlah turunan pertama setiap fungsi berikut ini

(a) f(x) = $4(2x - 5)^{3/2}$

(b) f(x) = $3(x^2 - 6x + 8)^5$

(c) f(x) = $6(2x - 1)^4 + 3(2x - 1)^2 - 6$

Jawab

(a) f(x) = $4(2x-5)^{3/2}$

f '(x) = (4). $\frac{3}{2}(2x-5)^{\frac{3}{2}-1}$ . (2)

f '(x) = 12 $(2x-5)^{1/2}$

(b) f(x) = $3(x^2-6x+8)^5$

f '(x) = (3) $5(x^2-6x+8)^4$ . (2x – 6)

f '(x) = (30x - 90) $(x^2-6x+8)^4$

(c) f(x) = $6(2x-1)^4$ + $3(2x-1)^2$ – 6

f '(x) = (6) $4(2x-1)^{4-1}$ (2) + (3) $2(2x-1)^{2-1}$ (2)

f '(x) = 48 $(2x-1)^3$ + 12 $(2x-1)$

Jika y = f(x) suatu fungsi dalam x maka f '(x) atau y' atau $\frac{df(x)}{dx}$ atau $\frac{dy}{dx}$ adalah turunan pertama dari fungsi y = f(x), maka dalam hal ini f "(x) atau y" atau $\frac{d^2f(x)}{dx^2}$ atau $\frac{d^2y}{dx^2}$ adalah turunan keduanya

Turunan f(x) dapat ditulis pula dalam notasi Leibniz sebagai $\frac{dy}{dx}$ untuk turunan pertama dan $\frac{d^2y}{dx^2}$ untuk turunan kedua

Untuk lebih jelasnya, ikutilah contoh soal berikut ini

10. Tentukanlah nilai turunan kedua dari setiap fungsi berikut ini untuk setiap nilai x yang diberikan

(a) f(x) = $2x^3-7x^2+4x-5$ untuk x = 2

(b) f(x) = 4 $\sqrt{(2x-5)^3}$ untuk x = 7

Jawab

(a) f(x) = $2x^3-7x^2+4x-5$ untuk x = 2

maka f '(x) = $6x^2-14x^1+4$

f "(x) = 12x – 14

Sehingga : f "(2) = 12(2) – 14

f "(2) = 24 – 14

f "(2) = 10

(b) f(x) = $\sqrt{(2x-5)^3}$ untuk x = 7

f(x) = $(2x-5)^{3/2}$

maka f '(x) = $\frac{3}{2}(2x-5)^{1/2}\ (2)$

f '(x) = $3(2x-5)^{1/2}$

f ''(x) = 3.$\frac{1}{2}(2x-5)^{-1/2}\ (2)$

f ''(x) = $3(2x-5)^{-1/2}$

Sehingga : f ''(7) = $3(2(7)-5)^{-1/2}$

f ''(7) = $3(9)^{-1/2}$

f ''(7) = 3$\left(\frac{1}{3}\right)$

f ''(7) = 1