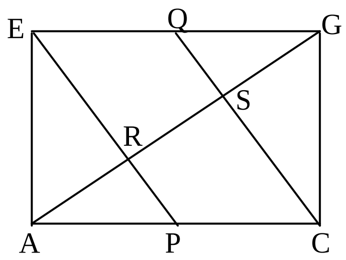
V E K T O R

F. Penerapan Vektor Pada Geometri Bidang

Terdapat cukup banyak penerapan konsep vektor dalam kehidupan sehari-hari, diantaranya untuk membuktikan dalil-dalil pada geometri bidang.
Berikut ini akan diberikan beberapa contoh soal, yakni:

01. Bidang empat ACGE adalah bidang diagonal kubus ABCD.EFGH. Jika P adalah titik tengah AC dan Q titik tengah EG maka buktikanlah bahwa $\overline{PE}$ tegak lurus dengan $\overline{AG}$



Jawab
Akan ditunjukkan bahwa $\overline{AG}.\overline{PE} = 0$

$\overline{AG}.\overline{PE} = (\overline{AC} + \overline{CG}).(\overline{PA} + \overline{AE})$

$= \overline{AC}.\overline{PA} + \overline{AC}.\overline{AE} + \overline{CG}.\overline{PA} + \overline{CG}.\overline{AE}$

$= -2\overline{PA}.\overline{PA} + 0 + 0 + \overline{CG}.\overline{CG}$

$= -2\left|\overline{PA}\right|^2 + \left|\overline{CG}\right|^2$

$= -2\left[\frac{1}{2}r\sqrt{2}\right]^2 + r^2$

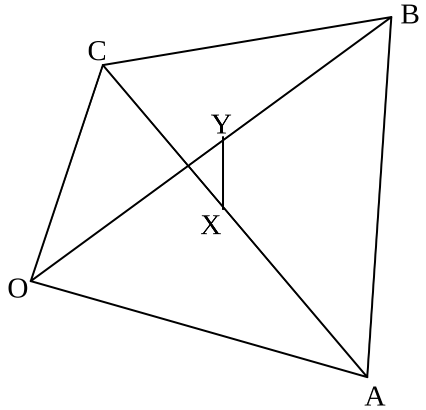
$= -r^2 + r^2$

$= 0$

Karena $\overline{AG}.\overline{PE} = 0$ maka $\overline{AG}$ tegak lurus $\overline{PE}$

02. Pada segiempat OABC dimana X adalah titik tengah $\overline{AC}$ dan Y adalah titik tengah $\overline{OB}$, tunjukkanlah bahwa $\overline{OA} + \overline{OC} + \overline{BA} + \overline{BC} = 4\,\overline{YX}$

Jawab



$\overline{OA} + \overline{OC} + \overline{BA} + \overline{BC}$

$= \overline{OA} - \overline{AB} + \overline{BC}\ \ \overline{CD}$

$= \overline{OA} + \overline{AB} - 2\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CO} - 2\overline{CO}$

$= (\overline{OA} + \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CO}) - 2\overline{AB} - 2\overline{CO}$

$= -2\overline{AB} - 2\overline{CO}$

$= 2\overline{AB} - 4\overline{AB} - 2\overline{CO}$

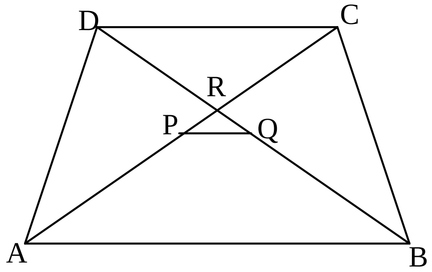
$= 2\overline{AB} + 4\overline{BA} + 2\overline{OC}$

$= 2\overline{AB} + (2\overline{AO} + 2\overline{OA}) + 4\overline{BA} + 2\overline{OC}$

$$= (2\overline{OA} + 2\overline{AB}) + (2\overline{AO} + 2\overline{OC}) + 4\overline{BA}$$
$$= 2\overline{OB} + 2\overline{AC} + 4\overline{BA}$$
$$= 4(\tfrac{1}{2}\overline{OB} + \tfrac{1}{2}\overline{AC} + \overline{BA})$$
$$= 4(\overline{YB} + \overline{BA} + \overline{AX})$$
$$= 4\overline{YX}$$

03. Dalam suatu trapesium buktikan bahwa garis-garis yang meghubungkan titik tengah kedua diagonalnya sejajar dengan sisi alas dan sisi atas. Serta buktikan bahwa panjang ruas garis setengah dari selisih panjang sisi alas dan sisi atas

Jawab



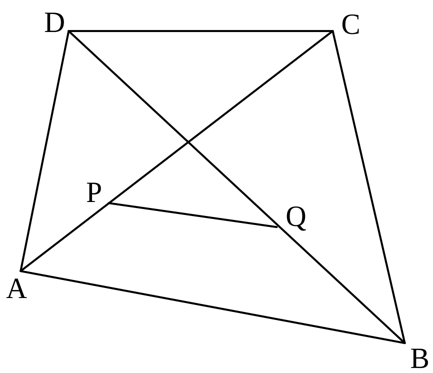
$$\overline{PQ} = \overline{PA} + \overline{AB} + \overline{BQ}$$
$$= \tfrac{1}{2}\overline{CA} + \overline{AB} + \tfrac{1}{2}\overline{BD}$$
$$= \tfrac{1}{2}(\overline{CA} + 2\overline{AB} + \overline{BD})$$
$$= \tfrac{1}{2}(\overline{CB} + \overline{BA} + 2\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD})$$
$$= \tfrac{1}{2}(2\overline{AB} + \overline{BA} + \overline{CD})$$
$$= \tfrac{1}{2}(2\overline{AB} - \overline{AB} + \overline{CD})$$
$$= \tfrac{1}{2}(\overline{AB} + \overline{CD})$$
$$\overline{PQ} = \tfrac{1}{2}(\overline{AB} - \overline{DC})$$

Karena $\overline{AB}$ sejajar $\overline{DC}$, maka $\overline{AB} - \overline{DC} = k.\ \overline{AB} = m.\ \overline{DC}$. Sehingga $\overline{PQ} = k.\ \overline{AB}$ dan $\overline{PQ} = m.\ \overline{DC}$. Ini berarti $\overline{PQ}\ //\ \overline{AB}\ //\ \overline{DC}$

04. Diketahui segiempat ABCD dimana titik P pada AC sehingga $\overline{AP} = \frac{1}{3}\overline{AC}$ dan titik Q pada $\overline{BD}$ sehingga $\overline{BD} = \frac{1}{3}\overline{BD}$. Buktikanlah bahwa $3\overline{PQ} = 2\overline{AB} + \overline{AD} - \overline{AC}$

Jawab

$$3\overline{PQ} = 3\,[\overline{PA} + \overline{AB} + \overline{BQ}]$$
$$= 3\,[\tfrac{1}{3}\overline{CA} + \overline{AB} + \tfrac{1}{3}\overline{BD}]$$
$$= \overline{CA} + 3\overline{AB} + \overline{BD}$$
$$= \overline{CA} + \overline{AB} + 2\overline{AB} + \overline{BD}$$
$$= \overline{CB} + 2\overline{AB} + (\overline{BA} + \overline{AB}) + (\overline{BC} + \overline{CD})$$
$$= 2\overline{AB} + \overline{CB} + \overline{BA} + \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD}$$
$$= 2\overline{AB} + \overline{CA} + \overline{AD}$$
$$= 2\overline{AB} + \overline{AD} - \overline{AC}$$



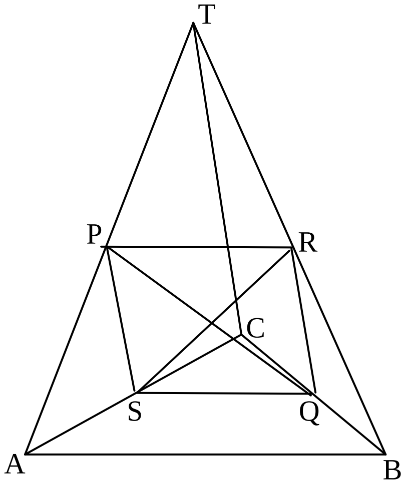
05. T.ABC adalah bidang empat (tetrahedron). Buktikanlah bahwa garis-garis yang menghubungkan titik-titik tengah rusuk-rusuk yang berhadapan potong-memotong tegak lurus.

Jawab

T.ABCD adalah tetrahedron berarti :

$|\overline{TA}| = |\overline{TB}| = |\overline{TC}| = |\overline{AB}| = |\overline{AC}| = |\overline{BC}|$

Misalkan P, Q, R dan S berturut-turut adalah titik tengah $\overline{AT}$, $\overline{BC}$, $\overline{BT}$ dan $\overline{AC}$ maka



$\overline{QS} = \frac{1}{2}\overline{BC} + \frac{1}{2}\overline{CA} = \frac{1}{2}(\overline{BC} + \overline{CA}) = \frac{1}{2}\overline{BA}$

$\overline{RQ} = \frac{1}{2}\overline{TB} + \frac{1}{2}\overline{BC} = \frac{1}{2}(\overline{TB} + \overline{BC}) = \frac{1}{2}\overline{TC}$

$\overline{RS} = \overline{RQ} + \overline{QS} = \frac{1}{2}\overline{BA} + \frac{1}{2}\overline{TC}$ ....(1)

$\overline{PR} = \frac{1}{2}\overline{AT} + \frac{1}{2}\overline{TB} = \frac{1}{2}(\overline{AT} + \overline{TB}) = \frac{1}{2}\overline{AB}$

$\overline{PQ} = \overline{PR} + \overline{RQ}$

$= \frac{1}{2}\overline{AB} + \frac{1}{2}\overline{TC}$

$= -\frac{1}{2}\overline{BA} + \frac{1}{2}\overline{TC}$ ....(2)

(1)(2) $\overline{PQ}.\overline{RS} = (-\frac{1}{2}\overline{BA} + \frac{1}{2}\overline{TC}).(\frac{1}{2}\overline{BA} + \frac{1}{2}\overline{TC})$

$= -\frac{1}{2}(\overline{BA} - \overline{TC}).\frac{1}{2}(\overline{BA} + \overline{TC})$

$= -\frac{1}{4}(|\overline{BA}|^2 - |\overline{TC}|^2)$

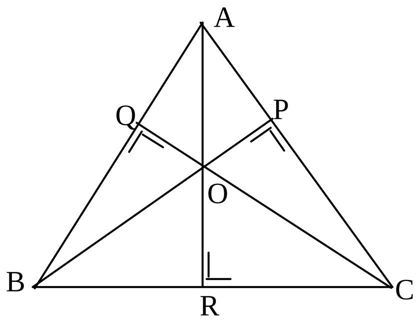
$\overline{PQ}.\overline{RS} = 0$ Jadi $\overline{PQ}$ tegak lurus $\overline{RS}$

Misalkan M adalah titik tengah $\overline{TC}$ dan N adalah titik tengah $\overline{AB}$ maka dengan cara yang sama dapat dibuktikan bahwa $\overline{RS}$ juga tegak lurus $\overline{MN}$. Jadi terbukti bahwa garis-garis yang menghubungkan titik-titik tengah rusuk-rusuk yang berhadapan potong-memotong tegak lurus

06. Buktikanlah bahwa ketiga garis tinggi suatu segitiga berpotongan di satu titik

Jawab

Ambil BP sebagai garis tinggi dari B dan CQ sebagai garis tinggi dari C dengan O sebagai titik potongnya. Akan dibuktikan bahwa jika AR melalui O maka AR juga garis tinggi



Tinjau : $\bar{b}.(\bar{c} - \bar{a}) = \bar{b}.\ \overline{AC}$

$= (\overline{OP} + \overline{PB}).\ \overline{AC}$

$= \overline{OP}.\ \overline{AC} + \overline{PB}.\ \overline{AC}$

$= 0 + 0$

$\bar{b}.(\bar{c} - \bar{a}) = 0$ .... (1)

Tinjau : $\bar{c}.(\bar{a} - \bar{b}) = \bar{c}.\ \overline{BA}$

$= (\overline{OQ} + \overline{QC}).\overline{BA}$

$= \overline{OQ}.\ \overline{BA} + \overline{QC}.\ \overline{BA}$

$= 0 + 0$

$\bar{c}.(\bar{a} - \bar{b}) = 0$ .... (2)

Tinjau $(\bar{a}.\bar{b} + \bar{b}.\bar{c} + \bar{c}.\bar{a}) - (\bar{a}.\bar{c} + \bar{c}.\bar{b} + \bar{b}.\bar{a}) = 0$

$(\bar{a}.\bar{b} - \bar{a}.\bar{c}) + (\bar{b}.\bar{c} - \bar{b}.\bar{a}) + (\bar{c}.\bar{a} - \bar{c}.\bar{b}) = 0$

$\bar{a}.(\bar{b} - \bar{c}) + \bar{b}.(\bar{c} - \bar{a}) + \bar{c}.(\bar{a} - \bar{b}) = 0$

$\bar{a}.(\bar{b} - \bar{c}) + 0 + 0 = 0$

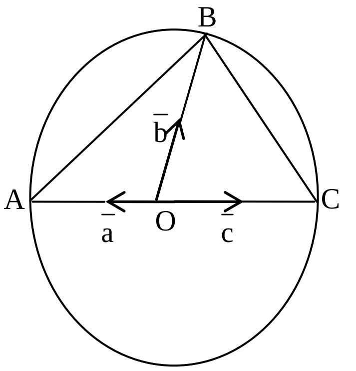
$\bar{a}.(\bar{b} - \bar{c}) = 0$

$\bar{a}.\ \overline{CB} = 0$

Ini berarti $\bar{a}$ tegak lurus pada $\overline{CB}$. Karena $\bar{a}$ dan $\overline{RA}$ kolinier, maka $\overline{RA}$ juga tegak lurus pada $\overline{CB}$. Kesimpulannya $\overline{RA}$ juga garis tinggi

07. Buktikanlah bahwa jika ABC adalah segitiga lingkaran luar dimana salah satu sisinya adalah diameter lingkaran, maka ABC adalah segitiga siku-siku

Jawab



Karena jari-jari lingkaran adalah r = $|\bar{a}| = |\bar{b}| = |\bar{c}|$

dan $\overline{AC}$ adalah diameter lingkaran maka $\bar{c} = -\bar{a}$

Sehingga $\overline{BA} = \bar{a} - \bar{b}$

$\overline{BC} = \bar{c} - \bar{b} = -\bar{a} - \bar{b}$

Tinjau $\overline{BA}\ .\ \overline{BC} = (\bar{a} - \bar{b}).(-\bar{a} - \bar{b})$

$= -\bar{a}.\bar{a} - \bar{a}.\bar{b} + \bar{a}.\bar{b} + \bar{b}.\bar{b}$

$= \bar{b}.\bar{b} - \bar{a}.\bar{a}$

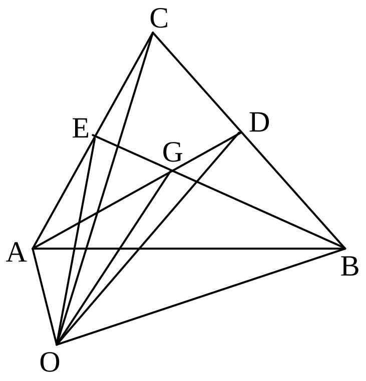
$= |\bar{b}|^2 - |\bar{a}|^2$

$= 0$

Karena $\overline{BA}\ .\ \overline{BC} = 0$ berarti $\overline{BA}$ tegak lurus $\overline{BC}$. Jadi segitiga ABC siku-siku di B

08. Buktikanlah bahwa garis-garis berat suatu segitiga melalui sebuah titik

Jawab



Pertama akan dibuktikan bahwa :

AC : GD = BG : GE = 2 : 1

Tinjau $\bar{d} = \frac{1}{2}(\bar{b} + \bar{c})$

$2\bar{d} = \bar{b} + \bar{c}$ .... (1)

$\bar{e} = \frac{1}{2}(\bar{a} + \bar{c})$

$2\bar{e} = \bar{a} + \bar{c}$ .... (2)

(1)(2) $2\bar{d} - 2\bar{e} = (\bar{b} + \bar{c}) - (\bar{a} + \bar{c})$

$2\bar{d} - 2\bar{e} = \bar{b} - \bar{a}$

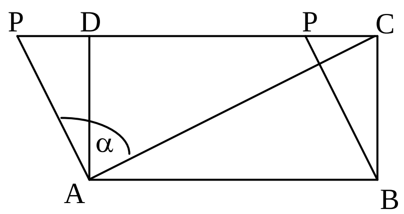
$2\bar{d} + \bar{a} = 2\bar{e} + \bar{b}$

$\frac{2\bar{d} + \bar{a}}{3} = \frac{2\bar{e} + \bar{b}}{3}$

Persamaan terakhir menunjukkan bahwa terdapat titik G pada $\overline{AD}$ dan $\overline{BE}$ sehingga $\bar{g} = \frac{2\bar{d} + \bar{a}}{3}$ dan $\bar{g} = \frac{2\bar{e} + \bar{b}}{3}$. Ini berarti G merupakan titik potong garis $\overline{AD}$ dan $\overline{BE}$.

09. Diketahui persegi panjang ABCD dimana titik P pada CD sehingga berlaku $\overline{CP} : \overline{PD} = 1 : 3$. Jika $\overline{AB}$ panjangnya 8 cm dan $\overline{AD}$ 6 cm, maka tentukanlah nilai $\overline{AB} . \overline{PB} + \overline{BC} . \overline{PB}$

Jawab



$|\overline{AC}| = 10$ cm

$|\overline{PA}| = \sqrt{40}$ cm $= 2\sqrt{10}$ cm

$|\overline{PC}| = 10$ cm

$\overline{AB} . \overline{PB} + \overline{BC} . \overline{PB} = \overline{PB} . (\overline{AB} + \overline{BC})$

$= \overline{PB} . \overline{AC}$

$= |\overline{PB}|\,|\overline{AC}| \cos \alpha$

$= |\overline{PA}|\,|\overline{AC}| \cos \alpha$

$= 2\sqrt{10} . 10 . \cos \alpha$ .... (1)

$|\overline{PC}|^2 = |\overline{AP}|^2 + |\overline{AC}|^2 - 2|\overline{AP}|\,|\overline{AC}| \cos\alpha$

$10^2 = (\sqrt{40})^2 + 10^2 - 2\sqrt{40}\,10 \cos\alpha$

$100 = 40 + 100 - 40\sqrt{40}\cos\alpha$ sehingga $\cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{10}}$ ……………………… (2)

Jadi : $\overline{AB}.\overline{PB} + \overline{BC}.\overline{PB} = 2\sqrt{10}.10.\dfrac{1}{\sqrt{10}} = 20$