

INTEGRAL TAK TENTU FUNGSI ALJABAR

B. Penerapan Integral Tak Tentu

Integral tak tentu dapat diterapkan dalam memecahkan beberapa permasalahan, baik dibidang matematika, fisika, kimia, ataupun pada permasalahan sehari-hari lainnya.

Beberapa contoh penerapan tersebut, diantaranya adalah :

- (1) Menentukan fungsi $f(x)$ jika $f'(x)$ dan $f(a)$ diketahui
- (2) Menentukan persamaan kurva jika diketahui gradien garis singgung dan titik singgungnya
- (3) Menentukan jarak, kecepatan dan percepatan gerak suatu benda

$$V(t) = \int a(t) dt \quad \text{dan} \quad s(t) = \int V(t) dt$$

Selengkapnya, penerapan di atas akan diuraikan dalam contoh soal berikut ini :

01. Jika diketahui $f'(x) = 6x^2 - 2x + 4$ dan $f(2) = 4$ maka tentukanlah fungsi $f(x)$

Jawab

$$f'(x) = 6x^2 - 2x + 4$$

$$\text{maka } f(x) = \int (6x^2 - 2x + 4) dx$$

$$f(x) = \frac{6}{3}x^3 - \frac{2}{2}x^2 + 4x + C$$

$$f(x) = 2x^3 - x^2 + 4x + C$$

$$\text{karena } f(2) = 4 \quad \text{maka } 2(2)^3 - (2)^2 + 4(2) + C = 4$$

$$16 - 4 + 8 + C = 4$$

$$20 + C = 4$$

$$\text{Jadi } C = -16$$

$$\text{Sehingga } f(x) = 2x^3 - x^2 + 4x - 16$$

02. Jika diketahui $f''(x) = 12x^2 - 6x$ dan berlaku $f'(2) = 15$ dan $f(-1) = 10$ maka tentukanlah persamaan fungsi $f(x)$

Jawab

$$f''(x) = 12x^2 - 6x$$

$$\text{maka } f'(x) = \int (12x^2 - 6x) dx$$

$$f'(x) = \frac{12}{3}x^3 - \frac{6}{2}x^2 + C$$

$$f'(x) = 4x^3 - 3x^2 + C$$

karena $f'(2) = 15$ maka $4(2)^3 - 3(2)^2 + C = 15$
 $32 - 12 + C = 15$
 $20 + C = 15$
Jadi $C = -5$

Sehingga $f'(x) = 4x^3 - 3x^2 - 5$
Kemudian $f(x) = \int (4x^3 - 3x^2 - 5)dx$
 $f(x) = \frac{4}{4}x^4 - \frac{3}{3}x^3 - 5x + C$
 $f(x) = x^4 - x^3 - 5x + C$

karena $f(-1) = 10$ maka $(-1)^4 - (-1)^3 - 5(-1) + C = 10$
 $1 + 1 + 5 + C = 10$
 $7 + C = 10$
Jadi $C = 3$

Sehingga $f(x) = x^4 - x^3 - 5x + 3$

03. Jika diketahui $f''(x) = 6x + 4$ dan berlaku $f(1) = 1$ dan $f(2) = 16$ maka tentukanlah persamaan fungsi $f(x)$

Jawab

$f''(x) = 6x + 4$ maka $f'(x) = \int (6x + 4)dx$
 $f'(x) = \frac{6}{2}x^2 - 4x + C_1$
 $f'(x) = 3x^2 - 4x + C_1$

Kemudian $f(x) = \int (3x^2 - 4x + C_1)dx$
 $f(x) = \frac{3}{3}x^3 - \frac{4}{2}x^2 + C_1x + C_2$
 $f(x) = x^3 - 2x^2 + C_1x + C_2$

karena $f(1) = 1$ maka $2(1)^3 - 2(1)^2 + C_1(1) + C_2 = 1$
 $2 - 2 + C_1 + C_2 = 1$
 $C_1 + C_2 = 1$ (1)

karena $f(2) = 16$ maka $2(2)^3 - 2(2)^2 + C_1(2) + C_2 = 16$
 $16 - 4 + 2C_1 + C_2 = 16$
 $12 + 2C_1 + C_2 = 16$
 $2C_1 + C_2 = 4$ (2)

Dari (1) dan (2) diperoleh $2C_1 + C_2 = 4$
 $C_1 + C_2 = 1$

 $C_1 = 3$ dan $C_2 = -2$

Sehingga $f(x) = x^3 - 2x^2 + 3x - 2$

04. Gradien garis singgung dari suatu kurva ditentukan dengan rumus $\frac{dy}{dx} = -4x + 3$.

Jika kurva tersebut melalui titik (3, -15), maka tentukanlah persamaan kurva itu

Jawab

$$\frac{dy}{dx} = -4x + 3$$

$$y = \int (-4x + 3) dx$$

$$y = -\frac{4}{2}x^2 + 3x + C$$

$$y = -2x^2 + 3x + C$$

kurva melalui (3, -15), maka $-15 = -2(3)^2 + 3(3) + C$

$$-15 = -18 + 9 + C$$

$$-15 = -9 + C \quad \text{Maka } C = -6$$

Jadi persamaan kurva adalah : $y = -2x^2 + 3x - 6$

05. Laju suatu partikel ditentukan dengan rumus $v(t) = 8t - 6$. Jika pada saat 3 detik partikel itu menempuh jarak 28 m, maka tentukanlah jaraknya setelah 5 detik

Jawab

$$v(t) = 8t - 6$$

$$s(t) = \int v(t) dt$$

$$s(t) = \int (8t - 6) dt$$

$$s(t) = \frac{8}{2}t^2 - 6t + C$$

$$s(t) = 4t^2 - 6t + C$$

Untuk $t = 3$ maka $s(3) = 4(3)^2 - 6(3) + C = 28$

$$36 - 18 + C = 28$$

$$18 + C = 28 \quad \text{maka } C = 10$$

Sehingga : $s(t) = 4t^2 - 6t + 10$

$$s(5) = 4(5)^2 - 6(5) + 10 = 100 - 30 + 10 = 80 \text{ m}$$

06. Percepatan gerak suatu benda ditentukan dengan rumus $a(t) = 24t - 6$. Jika pada saat 2 detik benda tersebut memiliki kecepatan 30 m/dt dan jarak 10 m, maka berapakah jarak benda setelah 3 detik ?

Jawab

$$a(t) = 24t - 6$$

$$v(t) = \int a(t) dt$$

$$v(t) = \int (24t - 6) dt$$

$$v(t) = \frac{24}{2}t^2 - 6t + C$$

$$v(t) = 12t^2 - 6t + C$$

$$\text{Untuk } t = 2 \text{ maka } v(2) = 12(2)^2 - 6(2) + C = 30$$

$$48 - 12 + C = 30 \quad \text{maka } C = -6$$

$$\text{sehingga : } v(t) = 12t^2 - 6t - 6$$

$$s(t) = \int v(t) dt$$

$$s(t) = \int (12t^2 - 6t - 6) dt$$

$$s(t) = \frac{12}{3}t^3 - \frac{6}{2}t^2 - 6t + C$$

$$s(t) = 4t^3 - 3t^2 - 6t + C$$

$$\text{Untuk } t = 2 \text{ maka } s(2) = 4(2)^3 - 3(2)^2 - 6(2) + C = 10$$

$$32 - 12 - 12 + C = 10 \quad \text{maka } C = 12$$

$$\text{Sehingga : } s(t) = 4t^3 - 3t^2 - 6t + 12$$

$$s(3) = 4(3)^3 - 3(3)^2 - 6(3) + 12 = 108 - 27 - 18 + 12 = 75 \text{ m}$$