

POLINOMIAL

C. Operasi Pembagian Pada Polinomial

Pembagian polinom pada prinsipnya bersesuaian dengan pembagian pada bilangan. Sebagai contoh akan kita lakukan pembagian 623 dengan 3 sebagai berikut :

$$\begin{array}{r} 3 \overline{) 653} \\ \underline{6} \\ 5 \\ \underline{3} \\ 23 \\ \underline{21} \\ 2 \end{array}$$

Pada pembagian tersebut,

3 dinamakan pembagi

653 dinamakan yang dibagi

217 dinamakan hasil bagi

2 dinamakan sisa pembagian

Sehingga berlaku :

$$653 = 3 \times 217 + 2$$

Pembagian dengan cara diatas dinamakan **metoda bersusun**. Untuk pembagian polinom, prosesnya memenuhi juga aturan bersusun diatas.

Sebagai contoh akan dilakukan pembagian bentuk polinom $(2x^3 - 5x^2 + 4x + 3)$ dengan $(x - 3)$ sebagai berikut :

$$\begin{array}{r} x - 3 \overline{) 2x^3 - 5x^2 + 4x + 3} \\ \underline{2x^3 - 6x^2} \\ x^2 + 4x \\ \underline{x^2 - 6x} \\ 7x + 3 \\ \underline{7x - 21} \\ 24 \end{array}$$

Dalam hal ini : $x - 3$ dinamakan pembagi

$2x^3 - 5x^2 + 4x + 3$ dinamakan yang dibagi

$2x^2 + x + 7$ dinamakan hasil bagi

24 dinamakan sisa pembagian

Sehingga berlaku : $2x^3 - 5x^2 + 4x + 3 = (x - 3)(2x^2 + x + 7) + 24$

Sehingga secara umum sifat dari pembagian polinom memenuhi aturan:

Yang dibagi = pembagi x hasil bagi + sisa

Selain dengan metoda bersusun, pembagian polinom dapat juga dilakukan dengan **skema Horner**. Sebagai contoh akan dilakukan kembali pembagian bentuk polinom $(2x^3 - 5x^2 + 4x + 3)$ dengan $(x - 3)$ menggunakan metoda Horner sebagai berikut :

$$\begin{array}{r|rrrr}
 3 & 2 & -5 & 4 & 3 \\
 & & 6 & 3 & 21 \\
 \hline
 & 2 & 1 & 7 & 24
 \end{array}$$

Koef. Hasil Bagi Horner
Sisa Horner

Sehingga didapatkan Hasil Bagi = $2x^2 + 1x + 7$ dan sisa = 24

Selanjutnya, penggunaan metoda Horner ini mengharuskan pembagi dikelompokkan sebagai berikut :

a. Pembagian polinom dengan $(x - k)$

Jika polinom $F(x)$ dibagi $(x - k)$ akan memperoleh hasil bagi $H(x)$ dan sisa s maka dalam hal ini berlaku sifat :

$$F(x) = (x - k)H(x) + s$$

$$\text{Untuk } x = k \text{ memenuhi } F(k) = (k - k)H(k) + s$$

$$F(k) = (0) + s$$

$$F(k) = s$$

Jadi Menurut Teorema Horner : Hasil bagi = $H(x)$

Sisa pembagian = $F(k)$

b. Pembagian polinom dengan $(ax - b)$

Jika polinom $F(x)$ dibagi dengan $(x - \frac{b}{a})$ akan memperoleh hasil bagi dan sisa

sebagai berikut : $F(x) = (x - \frac{b}{a})H(x) + \text{sisa}$

$$F(x) = \frac{a}{a} (x - \frac{b}{a})H(x) + s$$

$$F(x) = a(x - \frac{b}{a}) \frac{H(x)}{a} + s$$

$$F(x) = (ax - b) \frac{H(x)}{a} + s$$

$$\text{Untuk } x = \frac{b}{a} \text{ memenuhi } F(\frac{b}{a}) = (a(\frac{b}{a}) - b) \cdot \frac{H(b/a)}{a} + s$$

$$F(\frac{b}{a}) = (0) + s$$

$$F(\frac{b}{a}) = s$$

Jadi Menurut Teorema Horner : Hasil bagi = $\frac{H(x)}{a}$

Sisa pembagian = $F(\frac{b}{a})$

c. Pembagian polinom dengan $(x - x_1)(x - x_2)$

Jika polinom $F(x)$ dibagi dengan $(x - x_1)(x - x_2)$ akan menghasilkan hasil bagi dan sisa pembagian dengan dua kali tahapan Horner (Horner tingkat dua). Pada tingkat pertama $F(x)$ dibagi dengan $(x - x_1)$ menghasilkan hasil bagi $H_1(x)$ dan sisa s_1 . Kemudian pada tingkat kedua hasil bagi $H_1(x)$ dibagi lagi dengan $(x - x_2)$ menghasilkan hasil bagi $H_2(x)$ dan sisa s_2 . Prosesnya adalah sebagai berikut :

$$F(x) = (x - x_1)H_1(x) + s_1$$

$$F(x) = (x - x_1) [(x - x_2) H_2(x) + s_2] + s_1$$

$$F(x) = (x - x_1)(x - x_2) H_2(x) + (x - x_1)s_2 + s_1$$

Bentuk terakhir ini menunjukkan polinom $F(x)$ dibagi dengan $(x - x_1)(x - x_2)$ akan menghasilkan : Hasil bagi = $H_2(x)$

$$\text{Sisa pembagian} = (x - x_1)s_2 + s_1$$

d. Pembagian polinom dengan $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$

Merunut dari bentuk c di atas maka hasil bagi dan sisa dari pembagian polinom $F(x)$ dengan $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$ didapat dari proses berikut :

$$F(x) = (x - x_1)(x - x_2) H_2(x) + (x - x_1)s_2 + s_1$$

$$F(x) = \frac{a}{a} (x - x_1)(x - x_2) H_2(x) + (x - x_1)s_2 + s_1$$

$$F(x) = a(x - x_1)(x - x_2) \frac{H_2(x)}{a} + (x - x_1)s_2 + s_1$$

$$F(x) = (ax^2 + bx + c) \frac{H_2(x)}{a} + (x - x_1)s_2 + s_1$$

Bentuk terakhir ini menunjukkan polinom $F(x)$ dibagi dengan $ax^2 + bx + c$ akan

menghasilkan : Hasil bagi = $\frac{H_2(x)}{a}$

$$\text{Sisa pembagian} = (x - x_1)s_2 + s_1$$

Untuk lebih jelasnya akan diuraikan pada contoh soal berikut ini :

01. Tentukanlah hasil bagi dan sisa dari pembagian $(x^3 - 3x^2 - 5x - 3) : (x - 2)$ dengan metoda :

(a) Pembagian Bersusun

(b) Skema Horner

Jawab

(a) Dengan pembagian bersusun

$$\begin{array}{r} x - 2 \overline{) x^3 - 3x^2 - 5x - 3} = x^2 - x - 7 \\ \underline{x^3 - 2x^2} \\ -x^2 - 5x \\ \underline{-x^2 + 2x} \\ -7x - 3 \\ \underline{-7x + 14} \\ -17 \end{array}$$

Jadi : Hasil bagi = $x^2 - x - 7$
 Sisa = -17

(b) Dengan skema Horner

$$\begin{array}{r|rrrr}
 2 & 1 & -3 & -5 & -3 \\
 & & 2 & -2 & -14 \\
 \hline
 & 1 & -1 & -7 & -17
 \end{array} +$$

Hasil Bagi = $1x^2 - 1x - 7 = x^2 - x - 7$
 Sisa = -17

02. Tentukanlah hasil bagi dan sisa dari pembagian $(x^3 + 5x^2 + 4x + 2) : (x + 2)$ dengan metoda Skema Horner

Jawab

$$\begin{array}{r|rrrr}
 -2 & 1 & 5 & 4 & 2 \\
 & & -2 & -6 & 4 \\
 \hline
 & 1 & 3 & -2 & 6
 \end{array} +$$

Hasil Bagi = $1x^2 + 3x - 2 = x^2 + 3x - 2$
 Sisa = 6

03. Tentukanlah hasil bagi dan sisa dari $(4x^4 + 3x^2 - 2x + 5) : (2x - 1)$ dengan metoda :

(a) Pembagian Bersusun

(b) Skema Horner

Jawab

(a) Dengan pembagian bersusun

$$\begin{array}{r}
 2x - 1 \overline{) 4x^4 + 0x^3 + 3x^2 - 2x + 5} = 2x^3 + x^2 + 2x \\
 \underline{4x^4 - 2x^3} \\
 2x^3 + 3x^2 \\
 \underline{2x^3 - x^2} \\
 4x^2 - 2x \\
 \underline{4x^2 - 2x} \\
 5
 \end{array}$$

Jadi : Hasil bagi = $2x^3 + x^2 + 2x$
 Sisa = 5

(b) Dengan skema Horner

$$\begin{array}{r|rrrrr}
 1/2 & 4 & 0 & 3 & -2 & 5 \\
 & & 2 & 1 & 2 & 0 \\
 \hline
 & 4 & 2 & 4 & 0 & 5
 \end{array} +$$

$$\text{Hasil Bagi} = \frac{4x^3 + 2x^2 + 4x}{2} = 2x^3 + x^2 + 2x$$

$$\text{Sisa} = 5$$

04. Tentukanlah hasil bagi dan sisa dari $(4x^4 + x^2 - 5x - 7) : (2x + 1)$ dengan metoda Skema Horner

Jawab

$$\begin{array}{r|rrrrr}
 -1/2 & 4 & 0 & 1 & -5 & -7 \\
 & & -2 & 1 & -1 & 3 \\
 \hline
 & 4 & -2 & 2 & -6 & -4
 \end{array} +$$

$$\text{Hasil Bagi} = \frac{4x^3 - 2x^2 + 2x - 6}{2} = 2x^3 - x^2 + x - 3$$

$$\text{Sisa} = -4$$

05. Tentukanlah hasil bagi dan sisa dari $(x^3 - 2x^2 - 6x + 8) : (x^2 - 9)$ dengan metoda
 (a) Pembagian Bersusun (b) Skema Horner

Jawab

(a) Dengan pembagian bersusun

$$\begin{array}{r}
 x^2 + 0x - 9 \overline{) x^3 - 2x^2 - 6x + 8} = x - 2 \\
 \underline{x^3 + 0x^2 - 9x} \\
 -2x^2 + 3x + 8 \\
 \underline{-2x^2 + 0x + 18} \\
 3x - 10
 \end{array}$$

$$\text{Jadi : Hasil bagi} = x - 2$$

$$\text{Sisa} = 3x - 10$$

(b) Dengan skema Horner

$$\text{Pembagi : } x^2 - 9 = (x - 3)(x + 3)$$

$$x_1 = 3 \text{ dan } x_2 = -3$$

sehingga

$$\begin{array}{r|rrrr}
 3 & 1 & -2 & -6 & 8 \\
 & & 3 & 3 & -9 \\
 \hline
 -3 & 1 & 1 & -3 & -1 \\
 & & -3 & 6 & \\
 \hline
 & 1 & -2 & 3 &
 \end{array}$$

S_1 ←
 S_2 ←

Hasil Bagi = $x - 2$

$$\begin{aligned}
 \text{Sisa} &= (x - x_1)s_2 + s_1 \\
 &= (x - 3)3 + (-1) \\
 &= 3x - 9 - 1 \\
 &= 3x - 10
 \end{aligned}$$

06. Tentukanlah hasil bagi dan sisa dari pembagian $(2x^4 + 3x^3 - 12x^2 - 13x + 5) : (2x^2 + 3x - 2)$ dengan metoda Skema Horner

Jawab

$$\begin{aligned}
 \text{Pembagi : } 2x^2 + 3x - 2 &= (2x - 1)(x + 2) \\
 x_1 &= 1/2 \quad \text{dan} \quad x_2 = -2
 \end{aligned}$$

sehingga

$$\begin{array}{r|rrrrr}
 -2 & 2 & 3 & -12 & -13 & 5 \\
 & & -4 & 2 & 20 & -14 \\
 \hline
 1/2 & 2 & -1 & -10 & 7 & -9 \\
 & & 1 & 0 & -5 & \\
 \hline
 & 2 & 0 & -10 & 2 &
 \end{array}$$

$$\text{Hasil Bagi} = \frac{2x^2 + 0x - 10}{2} = x^2 - 5$$

$$\begin{aligned}
 \text{Sisa} &= (x - x_1)s_2 + s_1 \\
 &= (x - (-2))2 + (-9) \\
 &= (x + 2)2 - 9 \\
 &= 2x + 4 - 9 \\
 &= 2x - 5
 \end{aligned}$$

07. Tentukan hasil bagi dan sisa pembagian $(4x^4 + 8x^3 - 5x^2 + 2x - 1) : (4x^2 - 1)$ dengan metoda Skema Horner

Jawab

$$\text{Pembagi : } 4x^2 - 1 = (2x - 1)(2x + 1)$$

$$x_1 = 1/2 \text{ dan } x_2 = -1/2$$

sehingga

$$\begin{array}{r|rrrrr}
 -1/2 & 4 & 8 & -5 & 2 & -1 \\
 & & -2 & -3 & 4 & -3 \\
 \hline
 1/2 & 4 & 6 & -8 & 6 & -4 \\
 & & 2 & 4 & -2 & \\
 \hline
 & 4 & 8 & -4 & 4 &
 \end{array} +$$

$$\text{Hasil Bagi} = \frac{4x^2 + 8x - 4}{4} = x^2 + 2x - 1$$

$$\begin{aligned}
 \text{Sisa} &= (x - x_1)s_2 + s_1 \\
 &= (x - (-1/2))4 + (-4) \\
 &= (x + 1/2)4 - 4 \\
 &= 4x + 2 - 4 \\
 &= 4x - 2
 \end{aligned}$$

08. Tentukanlah hasil bagi dan sisa dari $(3x^3 - 8x^2 + 15x - 6) : (x^2 - 2x + 5)$ dengan metoda pembagian Bersusun

Jawab

$$\begin{array}{r}
 x^2 - 2x + 5 \overline{) 3x^3 - 8x^2 + 15x - 6} = 3x - 2 \\
 \underline{3x^3 - 6x^2 + 15x} \\
 -2x^2 + 0x - 6 \\
 \underline{-2x^2 + 4x - 10} \\
 -4x + 4
 \end{array}$$

$$\text{Jadi : Hasil bagi} = 3x - 2$$

$$\text{Sisa} = -4x + 4$$