# INTEGRAL LANJUTAN

## C. Menghitung Integral dengan Aturan Substitusi

Terkadang penyelesaian integral $\int f(x)\,dx$ memerlukan teknik-teknik tertentu. Salah satu diantara teknik itu adalah dengan *integral substitusi.* Integral substitusi merupakan proses balikan (invers) dari turuna pangkat.

Seperti diketahui jika y = $aU^n$, maka y' = $na.U^{n-1}.U'$
Sehingga jika y = $(4x-5)^3$ maka y' = $3(4x-5)^{3-1}.(4) = 12(4x-5)^2$
Dengan demikian, haruslah $\int 12(4x-5)^2\,dx = (4x-5)^3$ + C
Namun demikian, proses selengkapnya harus menggunakan aturan substitusi, yakni sebagai berikut :

Misalkan u = 4x – 5 , maka $\frac{du}{dx}$ = 4. sehingga dx = $\frac{du}{4}$

Jadi : $\int 12(4x-5)^2\,dx = \int 12.u^2\,\frac{du}{4}$

$= \int 3u^2\,du$

$= \frac{3}{3}u^{2+1}$ + C

$= u^3$ + C

$= (4x-5)^3$ + C

Untuk pemahaman lebih lanjut, pelajarilah contoh-contoh soal berikut ini :

01. Tentukanlah hasil dari :
   (a) $\int 4(2x-3)^5\,dx$
   (b) $\int 30x^2(2x^3+6)^4\,dx$

   Jawab

   (a) $\int 4(2x-3)^5\,dx$ = …..?

   Misalkan u = 2x – 3 , maka $\frac{du}{dx}$ = 2. sehingga dx = $\frac{du}{2}$

   Sehingga : $\int 4(2x-3)^5\,dx = \int 4.u^5\,\frac{du}{2}$

   $= \int 2u^5\,du$

   $= \frac{2}{6}u^{5+1}$ + C

$= \frac{1}{3}u^6 + C$

$= \frac{1}{3}(2x-3)^6 + C$

(b) $\int 30x^2(2x^3+6)^4\,dx$ = …..?

Misalkan u = $2x^3+6$ , maka $\frac{du}{dx} = 6x^2$. sehingga dx = $\frac{du}{6x^2}$

Sehingga : $\int 30x^2(2x^3+6)^4\,dx = \int 30x^2.u^4\,\frac{du}{6x^2}$

$= \int 5u^4\,du$

$= \frac{5}{5}u^{4+1} + C$

$= u^5 + C$

$= (2x^3+6)^5 + C$

02. Tentukanlah hasil dari

(a) $\int \frac{(2x-4)}{(2x^2-8x+5)^3}\,dx$

(b) $\int \frac{(2x^{-1}+3)^4}{x^2}\,dx$

Jawab

(a) $\int \frac{(2x-4)}{(2x^2-8x+5)^3}\,dx$ = …..?

Misalkan u = $2x^2-8x+5$ , maka $\frac{du}{dx} = 4x-8$. sehingga dx = $\frac{du}{4x-8}$

Sehingga : $\int \frac{(2x-4)}{(2x^2-8x+5)^3}\,dx = \int \frac{(2x-4)}{u^3}\cdot\frac{du}{4x-8}$

$= \int \frac{2(x-2)}{u^3}\cdot\frac{du}{4(x-2)}$

$= \int \frac{2(x-2)}{u^3}\cdot\frac{du}{4(x-2)}$

$= \int \frac{2}{u^3}\cdot\frac{du}{4}$

$= \frac{1}{2}\int u^{-3}.du$

$= \frac{1}{2}.\left[\frac{1}{-2}u^{-2}\right] + C$

$= -\frac{1}{4}u^{-2}$ + C

$= -\frac{1}{4}(2x^2 - 8x + 5)^{-2}$ + C

$= -\frac{1}{4(2x^2 - 8x + 5)^2}$ + C

(b) $\int \frac{(2x^{-1} + 3)^4}{x^2} dx$ = …..?

Misalkan u = $2x^{-1} + 5$ , maka $\frac{du}{dx}$ = $-2x^{-2}$. sehingga dx = $\frac{du}{-2x^{-2}}$

Sehingga : $\int \frac{(2x^{-1} + 3)^4}{x^2} dx$ = $\int x^{-2}.u^4.\frac{du}{-2x^{-2}}$

$= -\frac{1}{2}\int u^4\, du$

$= -\frac{1}{2}.\left[\frac{1}{5}u^5\right]$ + C

$= -\frac{1}{10}u^5$ + C

$= -\frac{1}{10}(2x^{-1} + 3)^5$ + C

03. Tentukanlah hasil dari

(a) $\int \sin x.\cos^4 x.\, dx$ (b) $\int \cos 3x\,[6\sin^2 3x + 4\sin 3x + 3]\, dx$

Jawab

(a) $\int \sin x.\cos^4 x.\, dx$ = …..?

Misalkan u = cos x , maka $\frac{du}{dx}$ = –sin x. sehingga dx = $\frac{du}{-\sin x}$

Sehingga : $\int \sin x.\cos^4 x.\, dx$ = $\int \sin x.u^4.\frac{du}{-\sin x}$

$= -\int u^4.du$

$= -\frac{1}{5}.u^5$ + C

$= -\frac{1}{5}.\cos^5 x$ + C

(b) $\int \cos 3x\,[6\sin^2 3x + 4\sin 3x + 3]\, dx$ = …..?

Misalkan u = sin 3x , maka $\frac{du}{dx}$ = 3.cos 3x. sehingga dx = $\frac{du}{3\cos 3x}$

Sehingga

$$\int \cos 3x\,[6\sin^2 3x + 4\sin 3x + 3]\,dx = \int \cos 3x\,[6u^2 + 4u + 3]\,\frac{du}{3\cos 3x}$$

$$= \frac{1}{3}\int [6u^2 + 4u + 3]\,du$$

$$= \frac{1}{3}\left[\frac{6}{3}.u^3 + \frac{4}{2}u^2 + 3u\right] + C$$

$$= \frac{1}{3}\left[2.u^3 + 2u^2 + 3u\right] + C$$

$$= \frac{2}{3}.u^3 + \frac{2}{3}u^2 + u + C$$

$$= \frac{2}{3}\sin^3 x + \frac{2}{3}\sin^2 x + \sin x + C$$

04. Tentukanlah hasil dari $\int \sin^3 x.\,dx$

Jawab

$$\int \sin^3 x.\,dx = \int \sin^2 x.\ \sin x.dx = \int (1-\cos^2 x).\ \sin x.dx$$

Misalkan u = cos x , maka $\frac{du}{dx}$ = –sin x. sehingga dx = $\frac{du}{-\sin x}$

Sehingga : $\int \sin^3 x.\,dx = \int (1-\cos^2 x).\ \sin x.dx$

$$= \int (1-u^2).\sin x.\frac{du}{-\sin x}$$

$$= -\int (1-u^2).du$$

$$= -\left[u - \frac{1}{3}.u^3\right] + C$$

$$= \frac{1}{3}.u^3 - u + C$$

$$= \frac{1}{3}.\sin^3 x - \sin x + C$$

05. Tentukanlah hasil dari $\int 12x.\cos(3x^2+4).\sin^4(3x^2+4).\,dx$

Jawab

Misalkan u = $\sin(3x^2+4)$ , maka $\frac{du}{dx} = 6x.\cos(3x^2+4)$.

sehingga dx = $\frac{du}{6x.\cos(3x^2+4)}$

Sehingga :

$$\int 12x.\cos(3x^2+4).\sin^4(3x^2+4).\,dx = \int 12x.\cos(3x^2+4).u^4 \frac{du}{6x.\cos(3x^2+4)}$$

$$= \int 2.u^4\,du$$

$$= \frac{2}{5}.u^5 + C$$

$$= \frac{2}{5}.\sin^5(3x^2+4) + C$$

Bentuk lain dari pengintegralan substitusi trigonometri adalah pengintegralan yang memuat bentuk-bentuk : $\sqrt{a^2-x^2}$ , $\sqrt{a^2+x^2}$ dan $\sqrt{x^2-a^2}$

Pengintegralan bentuk-bentuk diatas menggunakan teknik-teknik substitusi yang sedikit berbeda dengan teknik substitusi sebelumnya, yakni

Bentuk $\sqrt{a^2-x^2}$ disubstitusikan dengan t = a.sin x

Bentuk $\sqrt{a^2+x^2}$ disubstitusikan dengan t = a.tan x

Bentuk $\sqrt{x^2-a^2}$ disubstitusikan dengan t = a.sec x

Untuk lebih jelasnya, akan diuraikan dalam contoh soal berikut ini :

06. Tentukanlah hasil dari

(a) $\int \sqrt{16-x^2}\,dx$ (b) $\int_0^4 \sqrt{16-x^2}\,dx$

Jawab

(a) $\int \sqrt{16-x^2}\,dx$ = …..?

Misalkan x = 4.sin t maka $\frac{dx}{dt}$ = 4.cos t Jadi dx = 4.cos t dt

sehingga $\int \sqrt{16-x^2}\,dx = \int \sqrt{16-(4.\sin t)^2}\; 4.\cos t\,dt$

$$= \int \sqrt{16-16.\sin^2 t}\; 4.\cos t\,dt$$

$$= \int \sqrt{16(1-\sin^2 t)}\; 16.\cos t\,dt$$

$$= \int 4\sqrt{\cos^2 t}\; 4.\cos t\,dt$$

$$= \int 4.\cos t.\,4.\cos t\,dt$$

$$= 16\int \cos^2 t\,dt$$

$$= 16\int \frac{1}{2}(1+\cos 2t)\,dt$$

$$= 8(t + \frac{1}{2}\sin 2t) + C$$

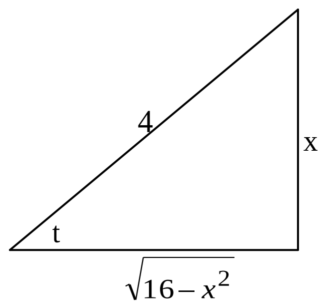
$$= 8(t + \frac{1}{2}(2.\sin t.\cos t) + C$$

$$= 8(t + \sin t.\cos t) + C$$

Karena x = 4.sin t

maka sin t = $\frac{x}{4}$ sehingga t = arc sin $\frac{x}{4}$

dan cos t = $\frac{\sqrt{16-x^2}}{4}$




Jadi $\int \sqrt{16-x^2}\,dx = 8(\arcsin\frac{x}{4} + \frac{x}{4}\frac{\sqrt{16-x^2}}{4}) + C$

$$= 8\arcsin\frac{x}{4} + \frac{x}{2}\sqrt{16-x^2} + C$$

Jika dinyatakan dalam bentuk umum, dan dengan mengikuti langkah-langkah pada soal di atas maka dapat diperoleh bentuk khusus dari pengintegralan $\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx$ , yaitu

$$\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + C$$

(b) $\int_0^4 \sqrt{16-x^2}\,dx = 8\arcsin\frac{x}{4} + \frac{x}{2}\sqrt{16-x^2}\Big|_0^4$

$$= \left[8\arcsin\frac{4}{4} + \frac{4}{2}\sqrt{16-4^2}\right] - \left[8\arcsin\frac{0}{4} + \frac{0}{2}\sqrt{16-0^2}\right]$$

$$= [8\arcsin 1 + 2(0)] - [8\arcsin 0 + (0)\sqrt{16}]$$

$$= \left[8.(\frac{\pi}{2}) + 0\right] - [8(0) + 0]$$

$$= 4\pi$$

07. Tentukanlah hasil dari $\int\sqrt{9-4x^2}\,dx$

Jawab

$$\int\sqrt{9-4x^2}\,dx = \int\sqrt{\frac{4(9)}{4} - 4x^2}\,dx$$

$$= \int 4.\sqrt{\frac{9}{4} - x^2}\,dx$$

$$= 4\int.\sqrt{\left[\frac{3}{2}\right]^2 - x^2}\,dx$$

$$= \frac{(3/2)^2}{2}\arcsin\frac{x}{3/2} + \frac{x}{2}\sqrt{(3/2)^2 - x^2} + C$$

$$= \frac{9/4}{2}\arcsin\frac{x}{3/2} + \frac{x}{2}\sqrt{\frac{9}{4} - x^2} + C$$

$$= \frac{9}{8}\arcsin\frac{2x}{3} + \frac{x}{2}\sqrt{\frac{9}{4} - \frac{4x^2}{4}} + C$$

$$= \frac{9}{8}\arcsin\frac{2x}{3} + \frac{x}{2}.\frac{\sqrt{9 - 4x^2}}{2} + C$$

$$= \frac{9}{8}\arcsin\frac{2x}{3} + \frac{x}{4}.\sqrt{9 - 4x^2} + C$$

08. Tentukanlah hasil dari $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{9 - x^2}}$

Jawab

Misalkan x = 3.sin t maka $\frac{dx}{dt}$ = 3.cos t Jadi dx = 3.cos t dt

sehingga $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{9 - x^2}} = \int \frac{3\cos t.dt}{(3\sin t)^2\sqrt{9 - (3\sin t)^2}}$

$$= \int \frac{3\cos t.dt}{9\sin^2 t.\sqrt{9 - 9\sin^2 t}}$$

$$= \int \frac{3\cos t.dt}{9\sin^2 t.\sqrt{9(1 - \sin^2 t)}}$$

$$= \int \frac{3\cos t.dt}{9\sin^2 t.3.\sqrt{\cos^2 t}}$$

$$= \int \frac{3.\cos t.dt}{9\sin^2 t.3.\cos t}$$

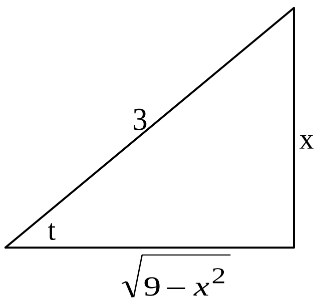
$$= \int \frac{dt}{9\sin^2 t}$$

$$= \frac{1}{9}\int \csc^2 t \, dt$$

$$= -\frac{1}{9}.\cot t + C$$

Karena x = 3.sin t maka sin t = $\frac{x}{3}$

sehingga cot t = $-\frac{\sqrt{9 - x^2}}{x}$



Jadi $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{9-x^2}} = \frac{1}{9}.\cot t + C$

$$= -\frac{1}{9}.\frac{\sqrt{9-x^2}}{x} + C$$

$$= -\frac{\sqrt{9-x^2}\,3}{9x} + C$$

09 Tentukanlah hasil dari $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{4+x^2}}$

Jawab

Misalkan x = 2tan$\theta$ maka dx = 2.sec$^2\theta$ d$\theta$

Sehingga $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{4+x^2}} = \int \frac{2\sec^2\theta\, d\theta}{(2\tan\theta)^2\sqrt{4+(2\tan\theta)^2}}$

$$= \int \frac{2\sec^2\theta\, d\theta}{(2\tan\theta)^2\sqrt{4+(2\tan\theta)^2}}$$

$$= \int \frac{2\sec^2\theta\, d\theta}{4\tan^2\theta\sqrt{4+4\tan^2\theta}}$$

$$= \int \frac{2\sec^2\theta\, d\theta}{4\tan^2\theta\sqrt{4(1+\tan^2\theta)}}$$

$$= \int \frac{2\sec^2\theta\, d\theta}{4\tan^2\theta\sqrt{4\sec^2\theta}}$$

$$= \int \frac{2\sec^2\theta\, d\theta}{4\tan^2\theta.2\sec\theta}$$

$$= \frac{1}{4}\int \frac{\sec\theta}{\tan^2\theta}\, d\theta$$

$$= \frac{1}{4}\int \frac{\left[\frac{1}{\cos\theta}\right]}{\left[\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right]^2}\, d\theta$$

$$= \frac{1}{4}\int \frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}\, d\theta$$

Misal u = sin$\theta$ maka $\frac{du}{d\theta}$ = cos $\theta$ sehingga d$\theta$ = $\frac{du}{\cos\theta}$

Jadi $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{4+x^2}} = \frac{1}{4}\int \frac{\cos\theta}{u^2}\frac{du}{\cos\theta}$

$$= \frac{1}{4}\int u^{-2} du$$

$$= -\frac{1}{4}u^{-1} + C$$

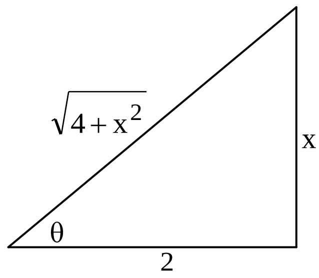
$$= -\frac{1}{4u} + C$$

$$= -\frac{1}{4\sin\theta} + C$$

Misalkan x = 2tan$\theta$ maka :

tan$\theta$ = $\frac{x}{2}$

sin$\theta$ = $\frac{x}{\sqrt{4+x^2}}$




Jadi : $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{4+x^2}} = -\frac{1}{4\sin\theta} + C$

$$= -\frac{1}{4\frac{x}{\sqrt{4+x^2}}} + C$$

$$= -\frac{\sqrt{4+x^2}}{4x} + C$$