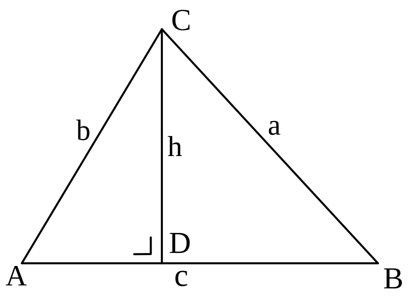
ATURAN SINUS DAN COSINUS

C. Luas Segitiga

Rumus luas segitiga ABC yang sudah kita ketahui sebelumnya adalah :



$L = \frac{1}{2}$ alas x tinggi

$L = \frac{1}{2}$ AB x CD

$L = \frac{1}{2} \cdot c \cdot h$ .... (1)

Karena h adalah garis tinggi, maka segitiga ACD adalah segitiga siku-siku, sehingga

$\sin A = \frac{CD}{AC} = \frac{h}{b}$ Jadi $h = b. \sin A$ .... (2)

Dari (1) dan (2) diperoleh $L = \frac{1}{2}.b.c.\sin A$

Jika garis tinggi h ditarik dari titik B maka diperoleh rumus $L = \frac{1}{2}.a.c.\sin B$

Jika garis tinggi h ditarik dari titik A maka diperoleh rumus $L = \frac{1}{2}.a.b.\sin C$

Jadi disimpulkan: Rumus luas segitiga ABC adalah :

$$L = \frac{1}{2}.b.c.\sin A$$
$$L = \frac{1}{2}.a.c.\sin B$$
$$L = \frac{1}{2}.a.b.\sin C$$

Rumus lain dari luas segitiga ABC adalah jika diketahui panjang ketiga sisinya (yakni a, b dan c). Rumus tersebut adalah

$$L = \sqrt{s\,(s-a)\,(s-b)\,(s-c)}$$

dimana $s = \frac{1}{2}(a + b + c)$

Bukti dari rumus ini adalah sebagai berikut :

Menurut identitas trigonometri $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$

Sehingga $\sin^2 A = 1 - \cos^2 A$

$\sin^2 A = (1 + \cos A)(1 - \cos A)$ .... (1)

Menurut aturan cosinus $a^2 = b^2 + c^2 - 2.b.c.\cos A$

Sehingga $2.b.c.\cos A = b^2 + c^2 - a^2$

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Dari (1) dan (2) :
$$\sin^2 A = \left[1 + \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}\right]\left[1 - \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}\right]$$
$$= \left[\frac{2bc + b^2 + c^2 - a^2}{2bc}\right]\left[\frac{2bc - b^2 - c^2 + a^2}{2bc}\right]$$
$$= \left[\frac{b^2 + 2bc + c^2 - a^2}{2bc}\right]\left[\frac{a^2 - (b^2 - 2bc + c^2)}{2bc}\right]$$
$$= \left[\frac{(b+c)^2 - a^2}{2bc}\right]\left[\frac{a^2 - (b-c)^2}{2bc}\right]$$
$$= \left[\frac{(b+c+a)(b+c-a)(a+b-c)(a-b+c)}{(2bc)^2}\right]$$

Sehingga diperoleh $\sin A = \sqrt{\frac{(b+c+a)(b+c-a)(a+b-c)(a-b+c)}{(2bc)^2}}$

$$\text{Sin } A = \frac{1}{2bc}\sqrt{(b+c+a)(b+c-a)(a+b-c)(a-b+c)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

Setengah keliling segitiga ABC adalah $s = \frac{1}{2}(a + b + c)$. Sehingga

$(a + b + c) = 2s$
$(b + c - a) = (a + b + c) - 2a = 2S - 2a = 2(s - a)$
$(a + b - c) = (a + b + c) - 2c = 2S - 2c = 2(s - c)$ $\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ (4)
$(a - b + c) = (a + b + c) - 2b = 2S - 2b = 2(s - b)$

Dari (3) dan (4) :
$$\text{Sin } A = \frac{1}{2bc}\sqrt{2s.\,2(s-a).2(s-b).2.(s-c)}$$
$$\text{Sin } A = \frac{4}{2bc}\sqrt{s.(s-a).(s-b).(s-c)}$$
$$\text{Sin } A = \frac{2}{bc}\sqrt{s.(s-a).(s-b).(s-c)}$$

Jika rumus terakhir ini disubstitusikan ke rumus luas segitiga $L = \frac{1}{2}.b.c.\sin A$, diperoleh :

$$L = \frac{1}{2}.b.c.\,\frac{2}{bc}\sqrt{s.(s-a).(s-b).(s-c)}$$
$$L = \sqrt{s.(s-a).(s-b).(s-c)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(terbukti)}$$

Untuk lebih jelasnya diskusikanlah contoh soal berikut ini :

01. Tentukanlah luas segitiga ABC jika diketahui sisi BC = 4 cm, AC = $7\sqrt{3}$ cm dan < C = 60^0

Jawab

Diketahui : BC = a = 4 cm

AC = b = $7\sqrt{3}$ cm

< C = 60^0

Maka : $L = \frac{1}{2}.a.b.\sin C$

$L = \frac{1}{2}(4)(7\sqrt{3}).\sin 60^0$

$L = (14\sqrt{3})(\frac{1}{2}\sqrt{3})$

$L = 21$

02. Sebuah segitiga ABC diketahui luasnya 18 cm^2. Jika panjang sisi BC = 4 cm dan AB = $6\sqrt{3}$ cm, maka tentukanlah besar sudut B

Jawab

Diketahui : Luas = 18 cm^2

BC = a = 4 cm

AB = c = $6\sqrt{3}$ cm

Maka : $L = \frac{1}{2}.a.c.\sin B$

$18 = \frac{1}{2}(4)(6\sqrt{3}).\sin B$

$18 = (12\sqrt{3}).\sin B$

$\text{Sin } B = \frac{18}{12\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$

$\text{Sin } B = \frac{18\sqrt{3}}{36}$

$\text{Sin } B = \frac{1}{2}\sqrt{3}$

Jadi < B = 60^0 atau < B = 120^0

03. Diketahui luas segitiga PQR adalah $12\sqrt{3}$ cm^2. Jika panjang PR = 6 cm dan sisi PQ = 8 cm , maka tentukanlah panjang sisi QR

Jawab

Jawab

Diketahui : Luas = $12\sqrt{3}$ cm^2

PR = q = 6 cm

PQ = r = 8 cm

Ditanya : Panjang sisi QR

Maka : $L = \frac{1}{2}.q.r.\sin P$

$12\sqrt{3} = \frac{1}{2}(6)(8).\sin P$

$12\sqrt{3} = 24.\sin P$

$\sin P = \frac{12\sqrt{3}}{24} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$

Jadi $< B = 60^0$ atau $< B = 120^0$

Untuk $< P = 60^0$ maka $p^2 = q^2 + r^2 - 2.q.r.\cos P$

$p^2 = 6^2 + 8^2 - 2.6.8.\cos 60^0$

$p^2 = 36 + 64 - 96(1/2)$

$p^2 = 52$

$p = 2\sqrt{13}$ cm

Untuk $< P = 120^0$ maka $p^2 = q^2 + r^2 - 2.q.r.\cos P$

$p^2 = 6^2 + 8^2 - 2.6.8.\cos 120^0$

$p^2 = 36 + 64 - 96(-1/2)$

$p^2 = 36 + 64 + 48$

$p^2 = 148$

$p = 2\sqrt{37}$ cm

04. Tentukanlah luas segitiga PQR, jika diketahui panjang sisi PQ = 5 cm, PR = 7 cm dan QR = 8 cm.

Jawab

Diketahui : PQ = r = 5 cm

PR = q = 7 cm

QR = p = 8 cm

Ditanya : Luas segitiga PQR

Maka : $s = \frac{1}{2}(p + q + r)$

$s = \frac{1}{2}(8 + 7 + 5)$

$s = 10$

sehingga : $L = \sqrt{s(s-p)(s-q)(s-r)}$

$L = \sqrt{10(10-8)(10-7)(10-5)}$

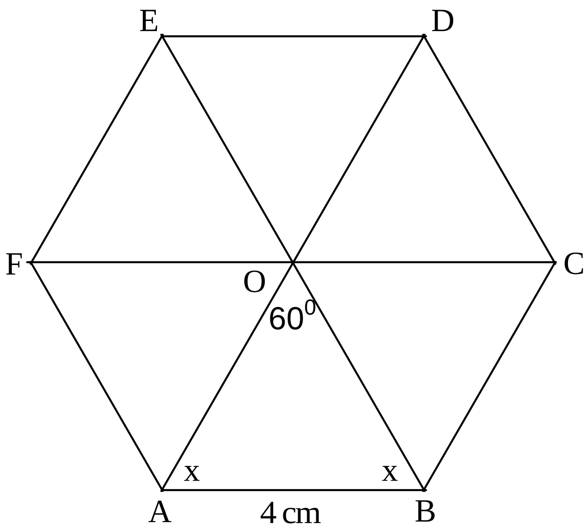
$L = \sqrt{10(2)(3)(5)}$

$L = \sqrt{300}$

$L = 10\sqrt{3}$ cm^2

05. Hitunglah luas segi enam beraturan ABCDEF yang panjang sisi-sisinya 4 cm

Jawab



$x + x + 60^0 = 180^0$

$2x = 120^0$

$x = 60^0$

Sehingga ABO segitiga sama sisi

OA = OB = AB = 4 cm

Jadi $L_{AOB} = \frac{1}{2}\, a \,.\, b \sin O$

$L_{AOB} = \frac{1}{2}\,(4)(4).\sin 60^0$

$L_{AOB} = (8)(\frac{1}{2}\sqrt{3})$

$L_{AOB} = 4\sqrt{3}\ \text{cm}^2$

Sehingga : $L = 6 \times L_{AOB}$

$L = 6(4\sqrt{3})\ \text{cm}^2$

$L = 24\sqrt{3}\ \text{cm}^2$