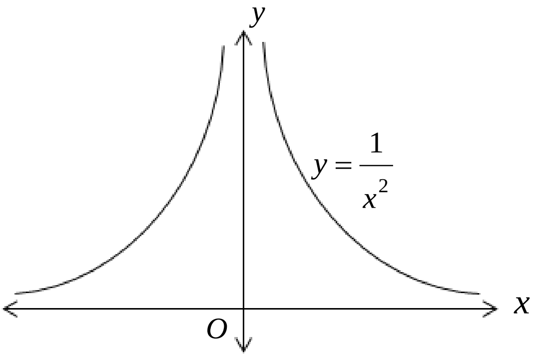
LIMIT FUNGSI

A. Limit Fungsi Aljabar di Tak Hingga

Terdapat perbedaan antara limit tak hingga (*infinite limits*) dan limit di tak hingga (*limits at infinity*). Limit tak hingga suatu fungsi f(x) adalah limit untuk x mendekati suatu bilangan real yang menghasilkan nilai tak hingga (∞). Seperti telah diuraikan di muka bahwa nilai limit suatu fungsi f(x) untuk x mendekati a didapat dengan cara mensubstitusikan nilai a^+ (pendekatan nilai a dari kanan) dan nilai a^- (pendekatan nilai a dari kiri) ke fungsi f(x). Jika ditemukan nilai $f(a^+) = f(a^-) = c$ maka diperoleh :

$$\underset{x\to a}{\text{Limit}}\ f(x) = c$$

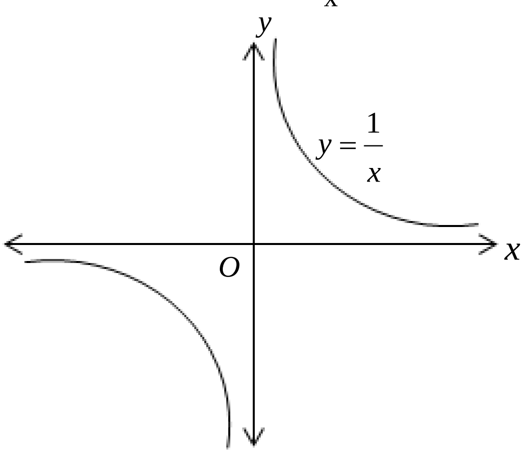
Sebagai contoh akan diberikan $\underset{x\to 0}{\text{Limit}}\ \frac{1}{x^2}$ dimana gambar $f(x) = \frac{1}{x^2}$ adalah sebagai berikut :



Dari gambar tersebut dapat dilihat bahwa $f(0^+) = f(0^-) = \infty$, artinya limit kiri sama dengan limit kanan.

Sehingga $\underset{x\to 0}{\text{Limit}}\ \frac{1}{x^2} = \infty$

Selanjutnya akan dibahas $\underset{x\to 0}{\text{Limit}}\ \frac{1}{x}$ yang gambar fungsi $f(x) = \frac{1}{x}$ adalah sebagai berikut :



Dari gambar tersebut dapat dilihat bahwa $f(0^+) = \infty$, dan $f(0^-) = -\infty$ artinya limit kiri dan limit kanan tidak sama. Sehingga $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x}$ = tidak ada

Untuk fungsi $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-3}}$ akan ditentukan nilai $\lim\limits_{x \to 3} \frac{1}{\sqrt{x-3}}$

Karena $x \geq 3$ maka hanya dilihat limit kanan saja, yakni $f(3^+)$ = , sehingga :

Sehingga $\lim\limits_{x \to 3} \frac{1}{\sqrt{x-3}} = \infty$

Berikut akan diberikan contoh soal limit tak hingga

01. Manakah diantara bentuk limit berikut ini mendapatkan hasil tak hingga atau tidak mempunyai limit:

(a) $\lim\limits_{x \to 2} \frac{3}{x^2 - 4}$ (b) $\lim\limits_{x \to 5} \frac{2}{x - 5}$ (c) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{4}{x^3}$

(d) $\lim\limits_{x \to 3} \frac{2x - 6}{x^2 - 6x + 9}$ (d) $\lim\limits_{x \to 2} \frac{5}{x^3 - 8}$ (e) $\lim\limits_{x \to 7} \frac{3}{\sqrt{x+2} - 3}$

Jawab

(a) ∞ (b) Tidak ada limit (c) Tidak ada limit

(d) Tidak ada limit (e) Tidak ada limit (f) ∞

Limit di tak hingga fungsi aljabar mempunyai dua bentuk umum (yang biasa dimunculkan), yakni :

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} \qquad \text{dan} \qquad \lim_{x \to \infty} [\, f(x) - g(x) \,]$$

Untuk menyelesaikan soal limit di tak hingga ini digunakana teorema:

Jika a adalah bilangan real tidak nol, maka $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{a}{x} = 0$, sehingga jika n adalah derajat tertinggi diantara f(x) dan g(x) dari bentuk $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)}$, maka baik pembilang maupun penyebut dibagi x^n

Untuk lebih jelasnya ikutilah contoh soal berikut ini :

01. Tentukanlah hasil dari :

(a) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{6x^3 + 4x + 6}{4x^2 + 2x^3 - 3x}$ (b) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{3x^2 - 6x + 1}{2 - 5x - 6x^2}$

Jawab

(a). $$\lim_{x\to\infty} \frac{6x^3+4x+6}{4x^2+2x^3-3x} = \lim_{x\to\infty} \frac{6x^3+4x+6}{4x^2+2x^3-3x} \times \frac{1/x^3}{1/x^3}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{6x^3}{x^3}+\frac{4x}{x^3}+\frac{6}{x^3}}{\frac{4x^2}{x^3}+\frac{2x^3}{x^3}-\frac{3x}{x^3}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{6+\frac{4}{x^2}+\frac{6}{x^3}}{\frac{4}{x}+2-\frac{3}{x^2}}$$

$$= \frac{6+\frac{4}{\infty}+\frac{6}{\infty}}{\frac{4}{\infty}+2-\frac{3}{\infty}}$$

$$= \frac{6+0+0}{0+2-0}$$

$$= \frac{6}{2}$$

$$= 3$$

(b). $$\lim_{x\to\infty} \frac{3x^2-6x+1}{2-5x-6x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{3x^2-6x+1}{2-5x-6x^2} \times \frac{1/x^2}{1/x^2}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{3x^2}{x^2}-\frac{6x}{x^2}+\frac{1}{x^2}}{\frac{2}{x^2}-\frac{5x}{x^2}-\frac{6x^2}{x^2}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{3-\frac{6}{x}+\frac{1}{x^2}}{\frac{2}{x^2}-\frac{5}{x}-6}$$

$$= \frac{3-\frac{6}{\infty}+\frac{1}{\infty}}{\frac{2}{\infty}-\frac{5}{\infty}-6}$$

$$= \frac{3-0+0}{0-0-6}$$

$$= \frac{3}{-6}$$

$$= -\frac{1}{2}$$

02. Tentukanlah hasil dari :

(a) $\underset{x\to\infty}{\text{Limit}} \dfrac{2x^3 - 4x^2 + 3x^5}{x^3 - 2x^2 - 4}$ (b) $\underset{x\to\infty}{\text{Limit}} \dfrac{3x^2 - 4x + 6}{4x^3 - 2x^2 - 3x}$

Jawab

(a) $$\underset{x\to\infty}{\text{Limit}} \frac{2x^3 - 4x^2 + 3x^5}{x^3 - 2x^2 - 4} = \underset{x\to\infty}{\text{Limit}} \frac{2x^3 - 4x^2 + 3x^5}{x^3 - 2x^2 - 4} \times \frac{1/x^5}{1/x^5}$$

$$= \underset{x\to\infty}{\text{Limit}} \frac{\dfrac{2x^3}{x^5} - \dfrac{4x^2}{x^5} + \dfrac{3x^5}{x^5}}{\dfrac{x^3}{x^5} - \dfrac{2x^2}{x^5} - \dfrac{4}{x^5}}$$

$$= \underset{x\to\infty}{\text{Limit}} \frac{\dfrac{2}{x^2} - \dfrac{4}{x^3} + 3}{\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{2}{x^3} - \dfrac{4}{x^5}}$$

$$= \frac{0 - 0 + 3}{0 - 0 - 0}$$

$$= \frac{3}{0}$$

$$= \infty$$

(b) Limit fungsi pecahan ini memiliki variable dengan pangkat tertinggi x^3, sehingga

$$\underset{x\to\infty}{\text{Limit}} \frac{3x^2 - 4x + 6}{4x^3 - 2x^2 - 3x} = \frac{0 - 0 + 0}{4 - 0 - 0} = \frac{0}{4} = 0$$

Dari contoh di atas, dapat disimpulkan bahwa penyelesaian limit tak hingga fungsi aljabar pecahan ditentukan oleh koefisien dari variable pangkat tertinggi. Untuk lebih jelasnya akan diuraikan pada contoh soal berikut ini :

03. Tentukanlah hasil dari :

(a) $\underset{x\to\infty}{\text{Limit}} \dfrac{(2x^2 - 3)(2x^3 - x)}{x^4 + 6x^5 - 3x^2 + 4}$ (b) $\underset{x\to\infty}{\text{Limit}} \dfrac{4x^6 - 5x^4 + x}{3x\,(2x^2 - 4x)^2}$

Jawab

(a) $$\underset{x\to\infty}{\text{Limit}} \frac{(2x^2 - 3)(2x^3 - x)}{x^4 + 6x^5 - 3x^2 + 4} = \underset{x\to\infty}{\text{Limit}} \frac{(2x^2)(2x^3) - (2x^2)(x) - (3)(2x^3) + (3)(x)}{x^4 + 6x^5 - 3x^2 + 4}$$

$$= \underset{x\to\infty}{\text{Limit}} \frac{4x^5 - 2x^3 - 6x^3 + 3x}{x^4 + 6x^5 - 3x^2 + 4}$$

(memiliki variable pangkat tertinggi x^5)

$$= \frac{4-0-0+0}{0+6-0+0}$$

$$= \frac{4}{6}$$

$$= \frac{2}{3}$$

(b) $\underset{x\to\infty}{\text{Limit}} \dfrac{4x^6 - 5x^4 + x}{3x\,(2x^2 - 4x)^2} = \underset{x\to\infty}{\text{Limit}} \dfrac{4x^6 - 5x^4 + x}{3x\,[(2x^2)^2 - 2(2x^2)(4x) + (4x)^2]}$

$$= \underset{x\to\infty}{\text{Limit}} \frac{4x^6 - 5x^4 + x}{3x\,[(4x^4 - 16x^3 + 16x^2]}$$

$$= \underset{x\to\infty}{\text{Limit}} \frac{4x^6 - 5x^4 + x}{12x^5 - 48x^4 + 48x^3}$$

(memiliki variable pangkat tertinggi x^6)

$$= \frac{4-0+0}{0-0+0}$$

$$= \frac{4}{0}$$

$$= \infty$$

04. Tentukanlah hasil dari :

(a) $\underset{x\to\infty}{\text{Limit}} (\sqrt{4x-3} - \sqrt{2x+5})$ (b) $\underset{x\to\infty}{\text{Limit}} (\sqrt{3x+2} - \sqrt{3x-4})$

Jawab

(a) $\underset{x\to\infty}{\text{Limit}} (\sqrt{4x-3} - \sqrt{2x+5}) = \underset{x\to\infty}{\text{Limit}} (\sqrt{4x-3} - \sqrt{2x+5})$ x $\dfrac{\sqrt{4x-3} + \sqrt{2x+5}}{\sqrt{4x-3} + \sqrt{2x+5}}$

$$= \underset{x\to\infty}{\text{Limit}} \frac{(4x-3) - (2x+5)}{\sqrt{4x-3} + \sqrt{2x+5}}$$

$$= \underset{x\to\infty}{\text{Limit}} \frac{2x-8}{\sqrt{4x-3} + \sqrt{2x+5}}$$

(memiliki variable pangkat tertinggi x)

$$= \frac{2-0}{\sqrt{0-0} + \sqrt{0+0}}$$

$$= \frac{2}{0}$$

$$= \infty$$

(b) $\underset{x\to\infty}{\text{Limit}} \; (\sqrt{3x+2} - \sqrt{3x-4}) = \underset{x\to\infty}{\text{Limit}} \; (\sqrt{3x+2} - \sqrt{3x-4})$ x $\dfrac{\sqrt{3x+2} + \sqrt{3x-4}}{\sqrt{3x+2} + \sqrt{3x-4}}$

$= \underset{x\to\infty}{\text{Limit}} \; \dfrac{(3x+2) - (3x-4)}{\sqrt{3x+2} + \sqrt{3x-4}}$

$= \underset{x\to\infty}{\text{Limit}} \; \dfrac{6}{\sqrt{3x+2} + \sqrt{3x-4}}$

(memiliki variable pangkat tertinggi $\sqrt{x}$)

$= \dfrac{0}{\sqrt{3+0} + \sqrt{3-0}}$

$= \dfrac{0}{2\sqrt{3}}$

$= 0$

Dari soal di atas dapat ditarik kesimpulan bahwa :

(1) $\underset{x\to\infty}{\text{Limit}} \; (\sqrt{ax+b} - \sqrt{cx+d}) = \infty$ jika a > c

(2) $\underset{x\to\infty}{\text{Limit}} \; (\sqrt{ax+b} - \sqrt{cx+d}) = -\infty$ jika a < c

(3) $\underset{x\to\infty}{\text{Limit}} \; (\sqrt{ax+b} - \sqrt{cx+d}) = 0$ jika a = c

05. Tentukanlah hasil dari :

(a) $\underset{x\to\infty}{\text{Limit}} \; (\sqrt{4x^2+3x-5} - \sqrt{4x^2-7x+2})$

(b) $\underset{x\to\infty}{\text{Limit}} \; (\sqrt{3x^2+8x-2} - \sqrt{3x^2+2x+5})$

Jawab

(a) $\underset{x\to\infty}{\text{Limit}} \; (\sqrt{4x^2+3x-5} - \sqrt{4x^2-7x+2})$

$= \underset{x\to\infty}{\text{Limit}} \; (\sqrt{4x^2+3x-5} - \sqrt{4x^2-7x+2})$ x $\dfrac{\sqrt{4x^2+3x-5} + \sqrt{4x^2-7x+2}}{\sqrt{4x^2+3x-5} + \sqrt{4x^2-7x+2}}$

$= \underset{x\to\infty}{\text{Limit}} \; \dfrac{(4x^2+3x-5) - (4x^2-7x+2)}{\sqrt{4x^2+3x-5} + \sqrt{4x^2-7x+2}}$

$= \underset{x\to\infty}{\text{Limit}} \; \dfrac{4x^2+3x-5-4x^2+7x-2}{\sqrt{4x^2+3x-5} + \sqrt{4x^2-7x+2}}$

$= \underset{x\to\infty}{\text{Limit}} \; \dfrac{10x-7}{\sqrt{4x^2+3x-5} + \sqrt{4x^2-7x+2}}$

(memiliki variable pangkat tertinggi x atau $\sqrt{x^2}$)

$= \dfrac{10-0}{\sqrt{4+0-0} + \sqrt{4-0+0}}$

$= \dfrac{10}{2+2}$

$= \dfrac{5}{2}$

(b) $\underset{x\to\infty}{\text{Limit}} \ (\sqrt{3x^2+8x-2} - \sqrt{3x^2+2x+5})$

$= \underset{x\to\infty}{\text{Limit}} \ (\sqrt{3x^2+8x-2} - \sqrt{3x^2+2x+5})$ x $\dfrac{(\sqrt{3x^2+8x-2} + \sqrt{3x^2+2x+5})}{(\sqrt{3x^2+8x-2} + \sqrt{3x^2+2x+5})}$

$= \underset{x\to\infty}{\text{Limit}} \ \dfrac{(3x^2+8x-2) - (3x^2+2x+5)}{(\sqrt{3x^2+8x-2} + \sqrt{3x^2+2x+5})}$

$= \underset{x\to\infty}{\text{Limit}} \ \dfrac{3x^2+8x-2 - 3x^2-2x-5}{(\sqrt{3x^2+8x-2} + \sqrt{3x^2+2x+5})}$

$= \underset{x\to\infty}{\text{Limit}} \ \dfrac{6x-7}{(\sqrt{3x^2+8x-2} + \sqrt{3x^2+2x+5})}$

(memiliki variable pangkat tertinggi x atau $\sqrt{x^2}$)

$= \dfrac{6-0}{\sqrt{3+0-0} + \sqrt{3+0+0}}$

$= \dfrac{6}{2\sqrt{3}}$ x $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$

$= \sqrt{3}$

Dari soal di atas dapat ditarik kesimpulan bahwa :

(1) $\underset{x\to\infty}{\text{Limit}} \ \sqrt{ax^2+bx+c} - \sqrt{dx^2+ex+f} \ = \ \infty$ jika a > d

(2) $\underset{x\to\infty}{\text{Limit}} \ \sqrt{ax^2+bx+c} - \sqrt{dx^2+ex+f} \ = \ \dfrac{b-e}{2\sqrt{a}}$ jika a = d

(3) $\underset{x\to\infty}{\text{Limit}} \ \sqrt{ax^2+bx+c} - \sqrt{dx^2+ex+f} \ = \ -\infty$ jika a < d

06. Tentukanlah hasil dari :

(a) $\underset{x\to\infty}{\text{Limit}} \ (\sqrt{(2x-1)(3x+2)} - \sqrt{(2x-5)(3x+5)})$

(b) $\underset{x\to\infty}{\text{Limit}} \ (\sqrt{(x-2)(x+1)} - \sqrt{2x^2+3x-4})$

Jawab

(a) $\underset{x\to\infty}{\text{Limit}} \ (\sqrt{(2x-1)(3x+2)} - \sqrt{(2x-5)(3x+5)})$

$= \underset{x\to\infty}{\text{Limit}} \ (\sqrt{6x^2+4x-3x-2} - \sqrt{6x^2+10x-15x-25})$

$= \underset{x \to \infty}{\text{Limit}} (\sqrt{6x^2 + x - 2} - \sqrt{6x^2 - 5x - 25})$

$= \dfrac{1 - (-5)}{2\sqrt{6}}$

$= \dfrac{6}{2\sqrt{6}}$ x $\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}}$

$= \dfrac{6\sqrt{6}}{12}$

$= \dfrac{\sqrt{6}}{2}$

(b) $\underset{x \to \infty}{\text{Limit}} (\sqrt{(x-2)(x+1)} - \sqrt{2x^2 + 3x - 4})$

$= \underset{x \to \infty}{\text{Limit}} (\sqrt{x^2 + x - 2x - 2} - \sqrt{2x^2 + 3x - 4})$

$= -\infty$

07. Tentukanlah hasil dari: $\underset{x \to \infty}{\text{Limit}} (\sqrt{4x^2 - 5x + 3} - (2x - 1))$

Jawab

$\underset{x \to \infty}{\text{Limit}} (\sqrt{4x^2 - 5x + 3} - (2x - 1))$

$= \underset{x \to \infty}{\text{Limit}} (\sqrt{4x^2 - 5x + 3} - \sqrt{(2x-1)^2})$

$= \underset{x \to \infty}{\text{Limit}} (\sqrt{4x^2 - 5x + 3} - \sqrt{4x^2 - 2x + 1})$

$= \dfrac{-5 - (-2)}{2\sqrt{4}}$

$= \dfrac{-3}{2(2)}$

= –3/4