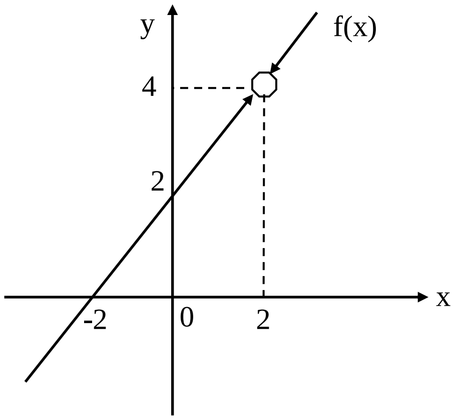
LIMIT FUNGSI ALJABAR

A. Limit Berhingga Fungsi Aljabar

Misalkan diketahui sebuah fungsi f(x) = $\frac{x^2 - 4}{x - 2}$.

Grafik untuk fungsi tersebut dapat dapat dilihat pada gambar disamping.



Jika x = 2 makaf(2) = $\frac{2^2 - 4}{2 - 2}$ = $\frac{0}{0}$

sehingga f(2) tak terdefinisi.

Jika kita cari nilai-nilai f(x) untuk mendekati 2 maka nilai fungsinya dapat dilihat pada table berikut ini

x	1,90	1,99	1,999	1,999	…	2	…	2,001	2,01	2,1
f(x)	3,90	3,99	3,999	3,999	…		…	4,001	4,01	4,1

Jadi dikatakan bahwa nilai pendekatan f(x) untuk x mendekati 2 adalah 4, baik pendekatan dari kiri ataupun pendekatan dari kanan. Atau ditulis

$$\lim_{x \to 2} f(x) = \lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = 4$$

Dari pendekatan contoh diatas dapat disimpulkan bahwa pengertian limit secara intuitif adalah sebagai berikut :

Jika $\underset{x \to c}{\text{Limit}}$ f(x) = L maka dapat diartikan bahwa bilamana x dekat tetapi berlainan dari c, maka f(x) dekat ke L.

Jika a adalah bilangan real berhingga, maka dalam menentukan nilai limit fungsi f(x) untuk x mendekati a dapat dilakukan dengan cara mensubstitusikan nilai a kefungsi f(x) atau

$\lim_{x \to a} f(x) =$ f(a)

Tetapi jika f(x) adalah fungsi pecahan dimana f(x) = $\frac{g(x)}{h(x)}$ maka ada kemungkinan hasil substitusinya tak terdefinisi, yaitu :

$\lim_{x \to a} f(x) = f(a) = \frac{g(a)}{H(a)} = \frac{0}{0}$ atau $\lim_{x \to a} f(x) = f(a) = \frac{g(a)}{H(a)} = \frac{\infty}{\infty}$.

Untuk dua bentuk diatas, fungsi f(x) nyaharus disederhanakan terlebih dahulu sehingga ketika disubstitusikan nilai f(a) tidak lagi $\frac{0}{0}$ atau $\frac{\infty}{\infty}$

Sebagai contoh $\underset{x \to 2}{\text{Limit}} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \underset{x \to 2}{\text{Limit}} \frac{(x-2)(x+2)}{x-2}$

$= \underset{x \to 2}{\text{Limit}} (x + 2)$

$= 2 + 2$

$= 4$

Untuk lebih jelasnya ikutilah contoh soal berikut ini :

01. Tentukanlah hasil setiap limit berikut ini

(a) $\underset{x \to 3}{\text{Limit}} \frac{x^2 + 2x - 15}{x^2 - 4x + 3}$ (b) $\underset{x \to 4}{\text{Limit}} \frac{x^2 - 8x + 16}{x^2 - 6x + 8}$

Jawab

(a). $\underset{x \to 3}{\text{Limit}} \frac{x^2 + 2x - 15}{x^2 - 4x + 3} = \underset{x \to 3}{\text{Limit}} \frac{(x+5)(x-3)}{(x-1)(x-3)}$

$= \underset{x \to 3}{\text{Limit}} \frac{x+5}{x-1}$

$= \frac{3+5}{3-1}$

$= 4$

(b). $\underset{x \to 4}{\text{Limit}} \frac{x^2 - 8x + 16}{x^2 - 6x + 8} = \underset{x \to 4}{\text{Limit}} \frac{(x-4)(x-4)}{(x-4)(x-2)}$

$= \underset{x \to 4}{\text{Limit}} \frac{x-4}{x-2}$

$= \frac{4-4}{4-2}$

$= 0$

02. Tentukanlah hasil setiap limit berikut ini

(a) $\underset{x\to 1}{\text{Limit}} \dfrac{x^4+3x^2-4}{x^2+x-2}$ (b) $\underset{x\to 2}{\text{Limit}} \dfrac{x^3+3x^2-10x}{x^3-4x^2+4x}$

Jawab

(a). $\underset{x\to 1}{\text{Limit}} \dfrac{x^4+3x^2-4}{x^2+x-2} = \underset{x\to 1}{\text{Limit}} \dfrac{(x^2)^2+3(x^2)-4}{x^2+x-2}$ Misalkan $x^2 = p$

$$= \underset{x\to 1}{\text{Limit}} \frac{p^2+3p-4}{(x+2)(x-1)}$$

$$= \underset{x\to 1}{\text{Limit}} \frac{(p+4)(p-1)}{(x+2)(x-1)}$$

$$= \underset{x\to 1}{\text{Limit}} \frac{(x^2+4)(x^2-1)}{(x+2)(x-1)}$$

$$= \underset{x\to 1}{\text{Limit}} \frac{(x^2+4)(x+1)(x-1)}{(x+2)(x-1)}$$

$$= \underset{x\to 1}{\text{Limit}} \frac{(x^2+4)(x+1)}{(x+2)}$$

$$= \frac{(1^2+4)(1+1)}{(1+2)}$$

$$= \frac{10}{3}$$

(b). $\underset{x\to 2}{\text{Limit}} \dfrac{x^3+3x^2-10x}{x^3-4x^2+4x} = \underset{x\to 2}{\text{Limit}} \dfrac{x(x^2+3x-10)}{x(x^2-4x+4)}$

$$= \underset{x\to 2}{\text{Limit}} \frac{x^2+3x-10}{x^2-4x+4}$$

$$= \underset{x\to 2}{\text{Limit}} \frac{(x+5)(x-2)}{(x-2)(x-2)}$$

$$= \underset{x\to 2}{\text{Limit}} \frac{x+5}{x-2}$$

$$= \frac{2+5}{2-2}$$

$$= \frac{7}{0}$$

$$= \infty$$

03. Tentukanlah hasil setiap limit berikut ini

(a) $\underset{x\to 3}{\text{Limit}}\ \dfrac{x^3 - 7x^2 + 12x}{x^3 - 27}$ (b) $\underset{x\to -2}{\text{Limit}}\ \dfrac{2x^3 + 16}{x^2 + 6x + 8}$

Jawab

Sebelum menjawab soal di atas akan kita bahas dulu pemfaktoran bentuk $a^3 – b^3$.

Menurut penjabaran Binomial Newton, diperoleh bentuk :

$(a – b)^3 = a^3 – 3a^2b + 3ab^2 – b^3$

$(a – b)^3 + 3a^2b – 3ab^2 = a^3 – b^3$

$a^3 – b^3 = (a – b)^3 + 3a^2b – 3ab^2$

$a^3 – b^3 = (a – b)^3 + 3ab(a – b)$

$a^3 – b^3 = (a – b) \{(a – b)^2 + 3ab\}$

$a^3 – b^3 = (a – b) \{a^2 – 2ab + b^2 + 3ab\}$

$a^3 – b^3 = (a – b)(a^2 + ab + b^2)$

Dengan cara yang sama juga diperolej pemfaktoran bentuk :

$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 – ab + b^2)$

Sehingga

(a). $$\underset{x\to 3}{\text{Limit}}\ \frac{x^3 - 7x^2 + 12x}{x^3 - 27} = \underset{x\to 3}{\text{Limit}}\ \frac{x(x^2 - 7x + 12)}{(x-3)(x^2 + 3x + 9)}$$

$$= \underset{x\to 3}{\text{Limit}}\ \frac{x(x-3)(x-4)}{(x-3)(x^2 + 3x + 9)}$$

$$= \underset{x\to 3}{\text{Limit}}\ \frac{x(x-4)}{(x^2 + 3x + 9)}$$

$$= \frac{3(3-4)}{(3^2 + 3(3) + 9)}$$

$$= \frac{3(-1)}{27}$$

$$= -\frac{1}{9}$$

(b). $$\underset{x\to -2}{\text{Limit}}\ \frac{2x^3 + 16}{x^2 + 6x + 8} = \underset{x\to -2}{\text{Limit}}\ \frac{2(x^3 + 8)}{x^2 + 6x + 8}$$

$$= \underset{x\to -2}{\text{Limit}}\ \frac{2(x+2)(x^2 - 2x + 4)}{(x+4)(x+2)}$$

$$= \underset{x\to -2}{\text{Limit}}\ \frac{2(x^2 - 2x + 4)}{x+4}$$

$$= \frac{2[(-2)^2 - 2(-2) + 4]}{-2+4}$$

$$= \frac{2[4+4+4]}{2}$$

$$= 12$$

04. Tentukanlah hasil setiap limit berikut ini

(a) $\lim_{x\to 3} \dfrac{x^2+3x-18}{\sqrt{x}-\sqrt{3}}$ (b) $\lim_{x\to 4} \dfrac{\sqrt{x}-2}{x^2-16}$

Jawab

(a). $\lim_{x\to 3} \dfrac{x^2+3x-18}{\sqrt{x}-\sqrt{3}} = \lim_{x\to 3} \dfrac{(x+6)(x-3)}{\sqrt{x}-\sqrt{3}} \times \dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{3}}{\sqrt{x}+\sqrt{3}}$

$= \lim_{x\to 3} \dfrac{(x+6)(x-3)(\sqrt{x}+\sqrt{3})}{x-3}$

$= \lim_{x\to 3} (x+6)(\sqrt{x}+\sqrt{3})$

$= (3+6)(\sqrt{3}+\sqrt{3})$

$= 9(2\sqrt{3})$

$= 18\sqrt{3}$

(b). $\lim_{x\to 4} \dfrac{\sqrt{x}-2}{x^2-16} = \lim_{x\to 4} \dfrac{\sqrt{x}-2}{(x-4)(x+4)} \times \dfrac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+2}$

$= \lim_{x\to 4} \dfrac{x-4}{(x-4)(x+4)(\sqrt{x}+2)}$

$= \lim_{x\to 4} \dfrac{1}{(x+4)(\sqrt{x}+2)}$

$= \dfrac{1}{(4+4)(\sqrt{4}+2)}$

$= \dfrac{1}{(8)(4)}$

$= \dfrac{1}{32}$

05. Tentukanlah hasil setiap limit berikut ini

(a) $\lim_{x\to 5} \dfrac{\sqrt{x-1}-2}{x^2-7x+10}$ (b) $\lim_{x\to 3} \dfrac{x^2-9}{\sqrt{x^2-5}-\sqrt{x+1}}$

Jawab

(a). $\lim_{x\to 5} \dfrac{\sqrt{x-1}-2}{x^2-7x+10} = \lim_{x\to 5} \dfrac{\sqrt{x-1}-2}{(x-5)(x-2)} \times \dfrac{\sqrt{x-1}+2}{\sqrt{x-1}+2}$

$= \lim_{x\to 5} \dfrac{(x-1)-4}{(x-5)(x-2)(\sqrt{x-1}+2)}$

$= \lim_{x\to 5} \dfrac{(x-5)}{(x-5)(x-2)(\sqrt{x-1}+2)}$

$$= \lim_{x\to 5} \frac{1}{(x-2)(\sqrt{x-1}+2)}$$

$$= \frac{1}{(5-2)(\sqrt{5-1}+2)}$$

$$= \frac{1}{(3)(2+2)}$$

$$= \frac{1}{12}$$

(b). $$\lim_{x\to 3} \frac{x^2-9}{\sqrt{x^2-5}-\sqrt{x+1}} = \lim_{x\to 3} \frac{(x-3)(x+3)}{\sqrt{x^2-5}-\sqrt{x+1}} \times \frac{\sqrt{x^2-5}+\sqrt{x+1}}{\sqrt{x^2-5}+\sqrt{x+1}}$$

$$= \lim_{x\to 3} \frac{(x-3)(x+3)(\sqrt{x^2-5}+\sqrt{x+1})}{(x^2-5)-(x+1)}$$

$$= \lim_{x\to 3} \frac{(x-3)(x+3)(\sqrt{x^2-5}+\sqrt{x+1})}{x^2-x-6}$$

$$= \lim_{x\to 3} \frac{(x-3)(x+3)(\sqrt{x^2-5}+\sqrt{x+1})}{(x-3)(x+2)}$$

$$= \lim_{x\to 3} \frac{(x+3)(\sqrt{x^2-5}+\sqrt{x+1})}{x+2}$$

$$= \frac{(3+3)(\sqrt{3^2-5}+\sqrt{3+1})}{3+2}$$

$$= \frac{(6)(2+2)}{5}$$

$$= \frac{24}{5}$$

06. Tentukanlah hasil setiap limit berikut ini

(a) $\lim_{x\to 2} \frac{2-\sqrt{x+2}}{3-\sqrt{3x+3}}$ (b) $\lim_{x\to 3} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{\sqrt{x+1}-2}$

Jawab

(a). $$\lim_{x\to 2} \frac{2-\sqrt{x+2}}{3-\sqrt{3x+3}} = \lim_{x\to 2} \frac{2-\sqrt{x+2}}{3-\sqrt{3x+3}} \times \frac{3+\sqrt{3x+3}}{3+\sqrt{3x+3}} \times \frac{2+\sqrt{x+2}}{2+\sqrt{x+2}}$$

$$= \lim_{x\to 2} \frac{(4-(x+2))(3+\sqrt{3x+3})}{(9-(3x+3))(2+\sqrt{x+2})}$$

$$= \lim_{x\to 2} \frac{(2-x)(3+\sqrt{3x+3})}{(6-3x)(2+\sqrt{x+2})}$$

$$= \lim_{x\to 2} \frac{(2-x)(3+\sqrt{3x+3})}{3(2-x)(2+\sqrt{x+2})}$$

$$= \lim_{x\to 2} \frac{3+\sqrt{3x+3}}{3(2+\sqrt{x+2})}$$

$$= \frac{3+\sqrt{3(2)+3}}{3(2+\sqrt{2+2})}$$

$$= \frac{3+3}{3(2+2)}$$

$$= \frac{6}{12}$$

$$= \frac{1}{2}$$

(b). $\lim_{x\to 3} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{\sqrt{x+1}-2} = \lim_{x\to 3} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{\sqrt{x+1}-2} \times \frac{\sqrt{x}+\sqrt{3}}{\sqrt{x}+\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{x+1}+2}{\sqrt{x+1}+2}$

$$= \lim_{x\to 3} \frac{(x-3)(\sqrt{x+1}+2)}{((x+1)-4)(\sqrt{x}+\sqrt{3})}$$

$$= \lim_{x\to 3} \frac{(x-3)(\sqrt{x+1}+2)}{(x-3)(\sqrt{x}+\sqrt{3})}$$

$$= \lim_{x\to 3} \frac{(\sqrt{x+1}+2)}{(\sqrt{x}+\sqrt{3})}$$

$$= \frac{(\sqrt{3+1}+2)}{(\sqrt{3}+\sqrt{3})}$$

$$= \frac{(2+2)}{2\sqrt{3}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{3}$$

07. Jika nilai $\lim_{x\to 3} \frac{\sqrt{x+a}-\sqrt{b-x}}{\sqrt{x-2}-\sqrt{4-x}} = \frac{1}{2}$ maka tentukanlah nilai a dan b

<u>Jawab</u>

Syarat limit adalah $\frac{\sqrt{3+a}-\sqrt{b-3}}{\sqrt{3-2}-\sqrt{4-3}} = \frac{0}{0}$

$\sqrt{3+a}-\sqrt{b-3} = 0$

$\sqrt{3+a} = \sqrt{b-3}$ maka a – b = –6 …………….. (1)

Maka :

$$\lim_{x\to 3} \frac{\sqrt{x+a}-\sqrt{b-x}}{\sqrt{x-2}-\sqrt{4-x}} = \lim_{x\to 3} \left[\frac{\sqrt{x+a}-\sqrt{b-x}}{\sqrt{x-2}-\sqrt{4-x}}\right]\left[\frac{\sqrt{x-2}+\sqrt{4-x}}{\sqrt{x-2}+\sqrt{4-x}}\right]\left[\frac{\sqrt{x+a}+\sqrt{b-x}}{\sqrt{x+a}+\sqrt{b-x}}\right]$$

$$\frac{1}{2} = \lim_{x\to 3} \left[\frac{(x+a)-(b-x)}{(x-2)-(4-x)}\right]\left[\frac{\sqrt{x-2}+\sqrt{4-x}}{\sqrt{x+a}+\sqrt{b-x}}\right]$$

$$\frac{1}{2} = \lim_{x\to 3} \left[\frac{2x+(a-b)}{2x-6}\right]\left[\frac{\sqrt{x-2}+\sqrt{4-x}}{\sqrt{x+a}+\sqrt{b-x}}\right]$$

$$\frac{1}{2} = \lim_{x\to 3} \left[\frac{2x-6}{2x-6}\right]\left[\frac{\sqrt{x-2}+\sqrt{4-x}}{\sqrt{x+a}+\sqrt{b-x}}\right]$$

$$\frac{1}{2} = \lim_{x\to 3} \left[\frac{\sqrt{x-2}+\sqrt{4-x}}{\sqrt{x+a}+\sqrt{b-x}}\right]$$

Sehingga : $\dfrac{\sqrt{3-2}+\sqrt{4-3}}{\sqrt{3+a}+\sqrt{b-3}} = \dfrac{1}{2}$

$$\frac{2}{\sqrt{3+a}+\sqrt{b-3}} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{2}{\sqrt{3+a}+\sqrt{3+a}} = \frac{1}{2}$$

maka $2\sqrt{3+a} = 4$ jaddi a = 1 dan b = 7

08. Hitunglah $\lim_{x\to 1} \dfrac{\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x}+1}{(x-1)^2}$

<u>Jawab</u>

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x}+1}{(x-1)^2} = \lim_{x\to 1} \frac{\left[\sqrt[3]{x}\right]^2-2\left[\sqrt[3]{x}\right]+1}{(\left[\sqrt[3]{x}\right]^3-1)^2}$$

Misalkan $\sqrt[3]{x} = p$ maka

$$= \lim_{p\to 1} \frac{p^2-2p+1}{(p^3-1)^2}$$

$$= \lim_{p\to 1} \frac{(p-1)(p-1)}{[(p-1)(p^2+p+1)]^2}$$

$$= \lim_{p\to 1} \frac{1}{(p^2+p+1)^2}$$

$$= \frac{1}{(1^2+1+1)^2}$$

$$= \frac{1}{9}$$

09. Jika hasil dari $\lim_{x\to 4} \frac{ax+b-\sqrt{x}}{x-4} = \frac{3}{4}$ maka tentukanlah nilai a dan b

Jawab

$$\lim_{x\to 4} \frac{ax+b-\sqrt{x}}{x-4} = \frac{3}{4} \begin{cases} a(4) + b - \sqrt{4} = 0 \text{ maka } 4a + b = 2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1) \\ \\ 4 - 4 = 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 4} \frac{ax+b-\sqrt{x}}{x-4} = \lim_{x\to 4} \frac{a(\sqrt{x})^2 + b - (\sqrt{x})}{(\sqrt{x})^2 - 4} = \frac{3}{4}$$

$$= \lim_{x\to 4} \frac{a(\sqrt{x})^2 + 2 - 4a - (\sqrt{x})}{(\sqrt{x})^2 - 4} = \frac{3}{4}$$

$$= \lim_{x\to 4} \frac{a[(\sqrt{x})^2 - 4] - [\sqrt{x} - 2]}{[\sqrt{x} - 2][\sqrt{x} + 2]} = \frac{3}{4}$$

$$= \lim_{x\to 4} \frac{a[\sqrt{x} - 2][\sqrt{x} + 2] - [\sqrt{x} - 2]}{[\sqrt{x} - 2][\sqrt{x} + 2]} = \frac{3}{4}$$

$$= \lim_{x\to 4} \frac{a[\sqrt{x} + 2] - 1}{\sqrt{x} + 2} = \frac{3}{4}$$

$$= \frac{a[\sqrt{4} + 2] - 1}{\sqrt{4} + 2} = \frac{3}{4}$$

= 4a – 1 = 3 maka a = 1

4(1) + b = 2 maka b = 2

10. Hitunglah $\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[3]{x^2} - 2\sqrt[3]{x} + 1}{(x-1)^2}$

<u>Jawab</u>

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[3]{x^2} - 2\sqrt[3]{x} + 1}{(x-1)^2} = \lim_{x\to 1} \frac{\left[\sqrt[3]{x}\right]^2 - 2\left[\sqrt[3]{x}\right] + 1}{(\left[\sqrt[3]{x}\right]^3 - 1)^2}$$

Misalkan $\sqrt[3]{x} = p$ maka

$$= \lim_{p\to 1} \frac{p^2 - 2p + 1}{(p^3 - 1)^2}$$

$$= \lim_{p\to 1} \frac{(p-1)(p-1)}{[(p-1)(p^2 + p + 1)]^2}$$

$$= \lim_{p\to 1} \frac{1}{(p^2 + p + 1)^2}$$

$$= \frac{1}{(1^2 + 1 + 1)^2} = \frac{1}{9}$$