TRANSFORMASI

B. Komposisi Transformasi

Komposisi transformasi merupakan susunan bererapa transformasi yang operasinya disusun menurut aturan komposisi

Sehingga (Tran1 o Tran2)(x, y) = [Tran1 (tran2 (x,y))]
= [Tran1 (x', y')]
= (x'', y'')

Untuk pemantapan lebih lanjut, ikutilah contoh soal berikut ini

01. Diketahui translasi $T_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \end{bmatrix}$ dan $T_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$. Tentukanlah bayangan titik P(5, –3) oleh $(T_1 \text{ o } T_2)$

Jawab

$(T_1 \text{ o } T_2)$(5, –3) = T_1 [T_2(5, –3)]
= T [(5 + 1, – 3 + 3)]
= T (6, 0)
= (6 + (–2), 0 + 4)
= (4, 4)

Atau : $(T_1 \text{ o } T_2)(5, -3) = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix}$ Jadi titiknya P'(4, 4)

02. Diketahui translasi T = $\begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$ dan M_1 yaitu pencerminan terhadap garis y = x.

Tentukanlah bayangan titik P(–4, 1) oleh T o M_1

Jawab

(T o M_1)(-4, 1) = T [M_1(–4, 1)]
= T (1, –4)
= (1 + 3, –4 + 5)
= (4, 1)

Atau (T o M_1)(-4, 1) $= \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$ Jadi titiknya P'(4, 1)

03. Jika M_1 adalah pencerminan terhadap garis x = 2 dan M_2 adalah pencerminan terhadap garis x = 4, maka tentukanlah bayangan titik A(5, -2) oleh tranformasi M_2 dilanjutkan dengan M_1

Jawab

$(M_1 \text{ o } M_2)(5, -2) = M_1[\, M_2(5, -2)\,]$

$= M_1[(2(4) - 5, -2)\,]$

$= M_1[(3, -2)\,]$

$= [(2(2) - 3, -2)\,]$

$= (1, -2)$

Cara lain, dengan menggunakan aturan komposisi dua refleksi , yakni refleksi terhadap garis x = a dan refleksi terhadap garis x = b

$(M_{x=b} \text{ o } M_{x=a})(x, y) = (2(b - a) + x , y)$

Bukti $(M_{x=b} \text{ o } M_{x=a})(x, y) = M_{x=b}\,[M_{x=a}(x, y)\,]$

$= M_{x=b}\,[(2a - x , y)]$

$= (2b - (2a - x) , y)$

$= (2(b - a) + x , y)$

Dengan cara yang sama diperoleh rumus aturan komposisi refleksi terhadap garis y = a dan garis y = b, yakni $(M_{y=a} \text{ o } M_{y=b})(x, y) = (x , 2(a - b) + y)$

Sehingga untuk titik A(5, -2) dicerminkan terhadap garis x = 4 dilanjutkan pada garis x = 2, diperoleh bayangan :

$(M_{x=2} \text{ o } M_{x=4})(5, -2) = (2(2 - 4) + 5 , -2)$

$= (2(-2) + 5 , -2)$

$= (1, -2)$

04. Tentukanlah bayangan titik (4, 3) oleh pencerminan terhadap garis y = –x dilanjutkan oleh dilatasi dengan pusat O(0, 0) dan skala –2

Jawab

$(D_{(O,-2)} \text{ o } M_{y=-x})(4, 3) = D_{(O,-2)}[\, M_{y=-x}(4, 3)\,]$

$= D_{(O,-2)}[(-3, -4)\,]$

$= (-2(-3), -2(-4))$

$= (6, 8)$

Atau dengan matriks $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0-0 & 2+0 \\ 0+2 & 0+0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 8 \end{bmatrix}$ Jadi bayangannya (6, 8)

05. Tentukanlah bayangan titik (-8, 4) oleh rotasi dengan pusat O(0, 0) dan sudut 45^0 dilanjutkan rotasi dengan pusat yang sama dengan sudut 135^0.

Jawab

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 135^0 & -\sin 135^0 \\ \sin 135^0 & \cos 135^0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos 45^0 & -\sin 45^0 \\ \sin 45^0 & \cos 45^0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -8 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -8 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\sqrt{2} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -8 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \frac{1}{4}(2) \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -8 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1-1 & 1-1 \\ 1-1 & -1-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -8 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -8 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -8 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ -4 \end{bmatrix}$$ Jadi bayangannya (8, –4)

Cara lain, dengan menggunakan aturan komposisi dua rotasi, yakni

$(R_{(O,\alpha)} \text{ o } R_{(O,\beta)})(x, y) = R_{(O,\alpha+\beta)}$

Bukti :

$$(R_{(O,\alpha)} \text{ o } R_{(O,\beta)})(x, y) = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\alpha.\cos\beta - \sin\alpha.\sin\beta & (\cos\alpha)(-\sin\beta) + (-\sin\alpha)(\cos\beta) \\ \sin\alpha.\cos + \cos\alpha\sin\beta & (\sin\alpha)(-\sin\beta) + (\cos\alpha)(\cos\beta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\alpha.\cos\beta - \sin\alpha.\sin\beta & -\cos\alpha\sin\beta - \sin\alpha\cos\beta \\ \sin\alpha.\cos + \cos\alpha\sin\beta & -\sin\alpha\sin\beta + \cos\alpha.\cos\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$= R_{(O,\alpha+\beta)}$$

Sehingga : $(R_{(O,135)} \circ R_{(O,45)})(x, y) = R_{(O,180)}$

Jadi $(R_{(O,135)} \circ R_{(O,45)})(-8, 4) = (-8.\cos 180^0 - 4.\sin 180^0 ,\ -8.\sin180^0 + 4.\cos180^0)$

$= (-8(-1) - 4.(0),\ -8(0) + 4(-1))$

$= (8 - 0,\ 0 - 4)$

$= (8,\ -4)$

06. Tentukanlah bayangan titik (6, –2) oleh refleksi terhadap sumbu X dilanjutkan rotasi dengan pusat O(0, 0)dan sudut 90^0.

Jawab

$(R_{(O,90)} \circ M_x)(6, -2) = (R_{(O,90)} [M_x (6, -2)]$

$= R_{(O,90)} [(6, 2)]$

$= (6.\cos 90^0 - 2.\sin 90^0 ,\ 6.\sin90^0 + 2.\cos90^0)$

$= (6(0) - 2(1) ,\ 6(1) + 2(0))$

$= (-2 ,\ 6)$

Atau dengan matriks $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 90^0 & -\sin 90^0 \\ \sin 90^0 & \cos 90^0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ -2 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ -2 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ -2 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 6 \end{bmatrix}$ Jadi bayangannya (–2, 6)

07. Tentukanlah hasil dari $[D_{(A,2)} \circ D_{(A,-3)}](-3, 5)$ jika pusat A(2, -1)

Jawab

$[D_{(A,2)} \circ D_{(A,-3)}](-3, 5) = D_{(A,2)} [\ D_{(A,-3)}(-3, 5)\ ]$

$= D_{(A,2)} [(-3(-3 - 2) + 2 ,\ -3(5 - (-1) + (-1))\ ]$

$= D_{(A,2)} [(-3(-5) + 2 ,\ -3(6) - 1)\ ]$

$= D_{(A,2)} [(17 ,\ -19)\ ]$

$= (2(17 - 2) + 2 ,\ 2(-19 - (-1) + (-1))$

$= (2(15) + 2 ,\ 2(-18) - 1)$

$= (32 ,\ -37)$

Beberapa rumus khusus dalam komposisi transformasi adalah :

1. Jika $T_1 = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ dan $T_2 = \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix}$ maka $(T_1 \circ T_2) = (T_2 \circ T_1) = \begin{bmatrix} a + p \\ b + q \end{bmatrix}$
2. $(D_{(0,c)} \circ D_{(0,k)}) = D_{(0,ck)}$