

# LINGKARAN

## B. Kedudukan Titik dan Garis Terhadap Lingkaran

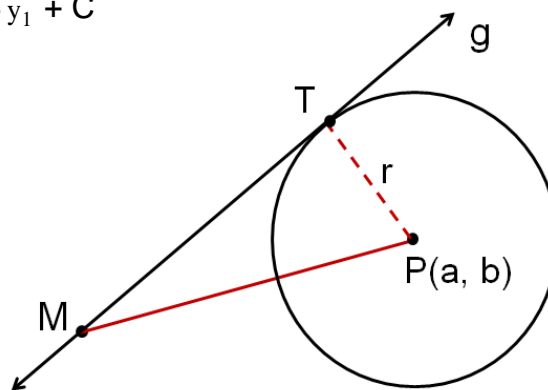
Jika diketahui lingkaran L adalah  $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$  dan terdapat titik  $M(x_1, y_1)$  diluar lingkaran L, maka kuasa titik M terhadap lingkaran L dirumuskan :

$$K(M) = (x_1 - a)^2 + (y_1 - b)^2 - r^2$$

Nilai kuasa ini menunjukkan kuadrat jarak dari titik M ke titik T.

Sedangkan untuk lingkaran  $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$ , kuasa titik  $M(x_1, y_1)$  dirumuskan

$$K(M) = x_1^2 + y_1^2 + Ax_1 + By_1 + C$$



Jika M titik diluar lingkaran dan g adalah garis singgung lingkaran yang ditarik dari M serta T adalah titik singgungnya, maka dirumuskan :

$$MT = \sqrt{K(M)}$$

Untuk pemahaman lebih lanjut ikutilah contoh soal berikut ini :

01. Tentukanlah nilai kuasa titik  $A(-3, 2)$  terhadap lingkaran  $x^2 + y^2 - 10x + 6y + 18 = 0$

Jawab

$$K(A) = x_1^2 + y_1^2 + Ax_1 + By_1 + C$$

$$K(A) = (-3)^2 + (2)^2 - 10(-3) + 6(2) + 18$$

$$K(A) = 9 + 4 + 30 + 12 + 18$$

$$K(A) = 73$$

02. Diketahui lingkaran berpusat di  $P(2, 4)$  dan berjari jari r. Jika kuasa lingkaran tersebut di titik  $A(6, -1)$  bernilai 16, maka tentukanlah persamaannya

Jawab

$$K(A) = 16$$

$$(x_1 - 2)^2 + (y_1 - 4)^2 - r^2 = 16$$

$$(6 - 2)^2 + (-1 - 4)^2 - r^2 = 16$$

$$16 + 25 - r^2 = 16$$

$$r^2 = 25$$

Persamaannya :  $(x - 2)^2 + (y - 4)^2 = 25$   
 $x^2 - 4x + 4 + y^2 - 8y + 16 = 25$   
 $x^2 + y^2 - 4x - 8y - 5 = 0$

03. Diketahui lingkaran  $x^2 + y^2 - 10x + 6y + 18 = 0$ . Jika kuasa titik A (10, p) terhadap lingkaran tersebut adalah 34, maka nilai p = ....

Jawab

$$K(A) = 34$$

$$x_1^2 + y_1^2 - 10x_1 + 6y_1 + 18 = 34$$

$$(10)^2 + (p)^2 - 10(10) + 6(p) + 18 = 34$$

$$100 + p^2 - 100 + 6p + 18 - 34 = 0$$

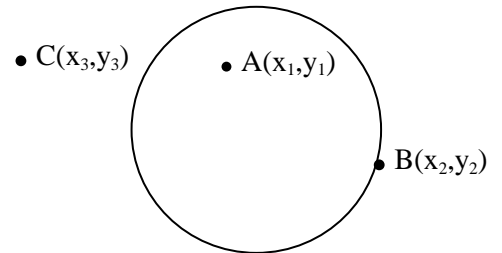
$$p^2 + 6p - 16 = 0$$

$$(p + 8)(p - 6) = 0$$

$$\text{Nilai } p = -8 \text{ dan } p = 6$$

Tiga kemungkinan kedudukan titik terhadap lingkaran L

1. Titik A(x, y) terletak di dalam lingkaran jika  $K(A) < 0$
2. Titik B(x, y) terletak pada lingkaran jika  $K(B) = 0$
3. Titik C(x, y) terletak di luar lingkaran jika  $K(C) > 0$



Sebagai contoh diketahui lingkaran  $(x - 2)^2 + (y + 4)^2 = 40$ , maka

Titik P(5, 1) terletak di dalam lingkaran karena  $(5 - 2)^2 + (1 + 4)^2 < 40$

Titik P(8, -2) terletak tepat pada lingkaran karena  $(8 - 2)^2 + (-2 + 4)^2 = 40$

Titik P(-3, 2) terletak di luar lingkaran karena  $(-3 - 2)^2 + (2 + 4)^2 > 40$

Untuk lingkaran  $x^2 + y^2 + 6x - 4y - 23 = 0$ , maka

Titik P(2, 5) terletak di dalam lingkaran karena  $2^2 + 5^2 + 6.2 - 4.5 - 23 < 0$

Titik P(3, 2) terletak tepat pada lingkaran karena  $3^2 + 2^2 + 6.3 - 4.2 - 23 = 0$

Titik P(4, -1) terletak di luar lingkaran karena  $4^2 + (-1)^2 + 6.4 - 4(-1) - 23 > 0$

Untuk lebih jelasnya, pelajarilah contoh soal berikut ini:

04. Tentukan kedudukan titik-titik berikut terhadap lingkaran  $(x - 3)^2 + (y + 5)^2 = 25$

(a) A(6, -1)

(b) B(-2, 1)

(c) C(4, -2)

Jawab

Diketahui lingkaran :  $(x - 3)^2 + (y + 5)^2 = 25$ , maka

(a) A(6, -1) diuji :  $(6 - 3)^2 + (-1 + 5)^2 = (3)^2 + (4)^2 = 25$

Titik A terletak pada lingkaran

(b) B(-2, 1) diuji :  $(-2 - 3)^2 + (1 + 5)^2 = (-5)^2 + (6)^2 = 61 > 25$

Titik B terletak di luar lingkaran

(c) C(4, -2) diuji :  $(4 - 3)^2 + (-2 + 5)^2 = (1)^2 + (3)^2 = 10 < 25$

Titik C terletak di dalam lingkaran

05. Tentukan kedudukan titik-titik berikut terhadap lingkaran  $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 7 = 0$   
 (a) A(3, -2)                      (b) B(-4, 1)                      (c) C(2, 5)

Jawab

Diketahui lingkaran :  $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 7 = 0$ , maka

$$\begin{aligned} \text{(a) A(3, -2) diuji : } & (3)^2 + (-2)^2 + 4(3) - 6(-2) - 7 \\ & = 9 + 4 + 12 + 12 - 7 \\ & = 30 > 0 \end{aligned}$$

Titik A terletak di luar lingkaran

$$\begin{aligned} \text{(b) B(-4, 1) diuji : } & (-4)^2 + (1)^2 + 4(-4) - 6(1) - 7 \\ & = 16 + 1 - 16 - 6 - 7 \\ & = -12 < 0 \end{aligned}$$

Titik B terletak di dalam lingkaran

$$\begin{aligned} \text{(c) C(2, 5) diuji : } & (2)^2 + (5)^2 + 4(2) - 6(5) - 7 \\ & = 4 + 25 + 8 - 30 - 7 \\ & = 0 \end{aligned}$$

Titik C terletak pada lingkaran

06. Tentukanlah jarak titik A (15, -3) terhadap lingkaran  $x^2 + y^2 - 10x + 6y + 18 = 0$

Jawab

$$x^2 + y^2 - 10x + 6y + 18 = 0$$

$$\text{pusat } P\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right)$$

$$\text{Jari-jari } r = \sqrt{\frac{A^2}{4} + \frac{B^2}{4} - C}$$

$$P\left(-\frac{(-10)}{2}, -\frac{6}{2}\right)$$

$$r = \sqrt{\frac{(-10)^2}{4} + \frac{(6)^2}{4} - 18}$$

$$P(5, -3)$$

$$r = \sqrt{25 + 9 - 18}$$

$$r = 4$$

Jarak titik A terhadap lingkaran =  $AP - r$

$$= \sqrt{(15 - 5)^2 + (-3 - (-3))^2} - 4$$

$$= \sqrt{(10)^2 + (0)^2} - 4$$

$$= 10 - 4$$

$$= 6$$

07. Jika diketahui titik T(k, 3) terletak pada lingkaran  $x^2 + y^2 - 13x + 5y + 6 = 0$  maka tentukanlah nilai k

Jawab

$$x^2 + y^2 - 13x + 5y + 6 = 0$$

$$(k)^2 + (3)^2 - 13(k) + 5(3) + 6 = 0$$

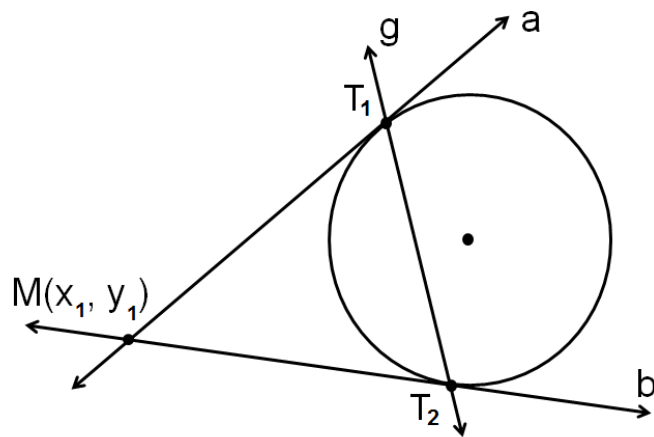
$$k^2 + 9 - 13k + 15 + 6 = 0$$

$$k^2 - 13k + 12 = 0$$

$$(k - 12)(k - 1) = 0$$

Jadi nilai  $k = 12$  dan  $k = 1$

Jika  $M(x_1, y_1)$  titik diluar lingkaran serta  $a$  dan  $b$  adalah garis singgung lingkaran yang ditarik dari  $M$  maka :  
 $M$  dinamakan titik polar  
 $g$  dinamakan garis polar



Persamaan garis polar pada lingkaran  $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$  yang ditarik dari titik  $M(x_1, y_1)$  dirumuskan :  $x_1x + y_1y + \frac{A}{2}(x + x_1) + \frac{B}{2}(y + y_1) + C = 0$

Contoh soal

08. Tentukan persamaan garis polar terhadap lingkaran  $x^2 + y^2 - 8x + 6y + 9 = 0$ . yang ditarik dari titik  $A(-2, 5)$

Jawab

$$x_1x + y_1y + \frac{A}{2}(x + x_1) + \frac{B}{2}(y + y_1) + C = 0$$

$$(-2)x + (5)y + \frac{(-8)}{2}(x + [-2]) + \frac{6}{2}(y + 5) + 9 = 0$$

$$-2x + 5y - 4(x - 2) + 3(y + 5) + 9 = 0$$

$$-2x + 5y - 4x + 8 + 3y + 15 + 9 = 0$$

$$-6x + 8y + 32 = 0$$

$$3x - 4y = 16$$

09. Jika titik  $T(1, 6)$  adalah titik polar dari lingkaran  $x^2 + y^2 + 2x - 19 = 0$  dan  $g$  adalah garis polarnya, maka tentukanlah titik potong lingkaran dengan garis  $g$

Jawab

$$x_1x + y_1y + \frac{A}{2}(x + x_1) + \frac{B}{2}(y + y_1) + C = 0$$

$$(1)x + (6)y + \frac{2}{2}(x + 1) + \frac{0}{2}(y + 6) - 19 = 0$$

$$x + 6y + (x + 1) + 0 - 19 = 0$$

$$2x + 6y = 18$$

$$x + 3y = 9$$

$$x = 9 - 3y$$

Disubstitusikan ke persamaan lingkaran diperoleh :

$$x^2 + y^2 + 2x - 19 = 0$$

$$(9 - 3y)^2 + y^2 + 2(9 - 3y) - 19 = 0$$

$$81 - 54y + 9y^2 + y^2 + 18 - 6y - 19 = 0$$

$$10y^2 - 60y + 80 = 0$$

$$y^2 - 6y + 8 = 0$$

$$(y - 4)(y - 2) = 0$$

$$y_1 = 4 \text{ dan } y_2 = 2$$

Untuk  $y_1 = 4$  maka  $x_1 = 9 - 3(4) = -3$  titiknya  $(4, -3)$

Untuk  $y_2 = 2$  maka  $x_2 = 9 - 3(2) = 3$  titiknya  $(2, 3)$

Kedudukan garis  $g$  terhadap lingkaran  $L$  ditentukan oleh nilai diskriminan  $D = b^2 - 4ac$ , hasil dari substitusi persamaan lingkaran dan persamaan garis. Ketentuannya :

1.  $D > 0$  garis  $g$  memotong lingkaran  $L$  di dua titik persekutuan
2.  $D = 0$  garis  $g$  menyinggung lingkaran  $L$  di satu titik
3.  $D < 0$  garis  $g$  di luar lingkaran  $L$

Sebagai contoh kedudukan garis  $y = 3x - 2$  terhadap lingkaran  $x^2 + y^2 - 8x - 2y + 15 = 0$  adalah berpotongan di dua titik, karena memenuhi aturan:

$$\begin{aligned} & x^2 + (3x - 2)^2 - 8x - 2(3x - 2) + 15 \\ = & x^2 + 9x^2 - 12x + 4 - 8x - 6x + 4 + 15 \\ = & 10x^2 + 4x - 16 \\ = & 5x^2 + 2x - 8 \end{aligned}$$

$$\text{Tinjau } D = 2^2 - 4(5)(-8) = 164 > 0$$

Karena  $D > 0$  maka garis  $y = 3x - 2$  memotong lingkaran  $x^2 + y^2 - 8x - 2y + 15 = 0$  di dua titik

Untuk lebih jelasnya, pelajarilah contoh soal berikut ini:

10. Tentukanlah kedudukan garis  $y = x - 2$  terhadap lingkaran  $(x - 3)^2 + (y + 4)^2 = 9$

Jawab

$$\text{Lingkaran : } (x - 3)^2 + (y + 4)^2 = 9$$

$$\text{Garis : } y = x - 2$$

$$\text{Maka : } (x - 3)^2 + (x - 2 + 4)^2 = 9$$

$$(x - 3)^2 + (x + 2)^2 = 9$$

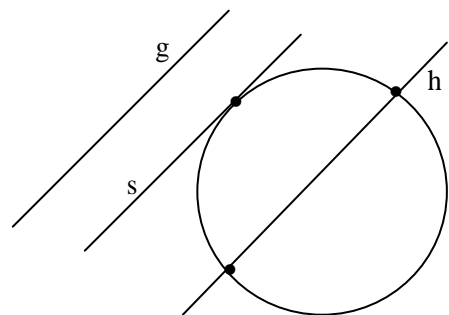
$$x^2 - 6x + 9 + x^2 + 4x + 4 = 9$$

$$2x^2 - 2x + 4 = 0$$

$$x^2 - x + 2 = 0$$

$$\text{Tinjau } D = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4(1)(2) = 1 - 8 = -7 < 0$$

Karena  $D < 0$  maka garis berada di luar lingkaran



11. Jika garis  $y = x + 9$  menyinggung lingkaran  $x^2 + y^2 + 8x - 10y + 21 - p = 0$  di satu titik maka tentukanlah nilai  $p$

Jawab

$$x^2 + y^2 + 8x - 10y + 21 - p = 0$$

$$x^2 + (x + 9)^2 + 8x - 10(x + 9) + 21 - p = 0$$

$$x^2 + x^2 + 18x + 81 + 8x - 10x - 90 + 21 - p = 0$$

$$2x^2 + 16x + 12 + p = 0$$

$$\text{Syarat } D = b^2 - 4ac = 0$$

$$16^2 - 4(2)(12 + p) = 0$$

$$32 - 12 - p = 0$$

$$20 - p = 0 \text{ jadi } p = 20$$

12. Buktikan bahwa garis  $y = 2x + 1$  memotong lingkaran  $x^2 + y^2 + 4x + 6y + 8 = 0$  dan tentukanlah titik potongnya

Jawab

$$x^2 + y^2 + 4x + 6y + 8 = 0$$

$$x^2 + (2x + 1)^2 + 4x + 6(2x + 1) + 8 = 0$$

$$x^2 + 4x^2 + 4x + 1 + 4x + 12x + 6 + 8 = 0$$

$$5x^2 + 20x + 15 = 0$$

$$x^2 + 4x + 3 = 0$$

$$\text{tinjaut } D = b^2 - 4ac$$

$$D = 4^2 - 4(1)(3)$$

$$D = 16 - 12$$

$$D = 4$$

Karena  $D > 0$  maka garis memotong lingkaran. Titik potongnya :

$$x^2 + 4x + 3 = 0$$

$$(x + 3)(x + 1) = 0$$

$$x_1 = -3 \text{ dan } x_2 = -1$$

$$\text{Untuk } x = -3 \text{ maka } y = 2(-3) + 1 = -5 \text{ Titik potongnya } (-3, -5)$$

$$\text{Untuk } x = -1 \text{ maka } y = 2(-1) + 1 = -1 \text{ Titik potongnya } (-1, -1)$$

13. Jika garis  $3x - 2y - 6 = 0$  menyinggung lingkaran  $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 8 = 0$ , maka tentukanlah titik singgungnya

Jawab

$$3x - 2y - 6 = 0$$

$$2y = 3x - 6$$

$$y = \frac{3x - 6}{2}$$

$$x^2 + y^2 + 2x - 4y - 8 = 0$$

$$x^2 + \left[ \frac{3x - 6}{2} \right]^2 + 2x - 4 \left[ \frac{3x - 6}{2} \right] - 8 = 0$$

$$x^2 + \left[ \frac{9x^2 - 36x + 36}{4} \right] + 2x - 2(3x - 6) - 8 = 0$$

$$4x^2 + 9x^2 - 36x + 36 + 8x - 24x + 48 - 32 = 0$$

$$13x^2 - 52x + 52 = 0$$

$$x^2 - 4x + 4 = 0$$

$$(x - 2)(x - 2) = 0$$

$$x_1 = 2 \text{ dan } x_2 = 2$$

$$\text{Untuk } x = 2 \text{ maka } y = \frac{3(2) - 6}{2} = 0 \text{ Titik potongnya } (2, 0)$$

14. Garis g dengan gradien 2 membagi lingkaran  $x^2 + y^2 + 4x - 8y - 5 = 0$  atas dua bagian yang sama. Tentukanlah persamaan garis g

Jawab

Karena garis g membagi lingkaran atas dua bagian yang sama, maka garis g melalui pusat lingkaran, sehingga :

$$x^2 + y^2 + 4x - 8y - 5 = 0$$

$$\text{pusatnya di } P\left(-\frac{4}{2}, -\frac{(-8)}{2}\right)$$

$$P(-2, 4)$$

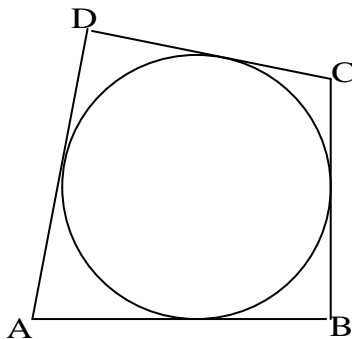
$$\text{Sehingga garis g : } y - y_1 = m_g (x - x_1)$$

$$y - 4 = 2(x - [-2])$$

$$y - 4 = 2x + 4$$

$$y = 2x + 8$$

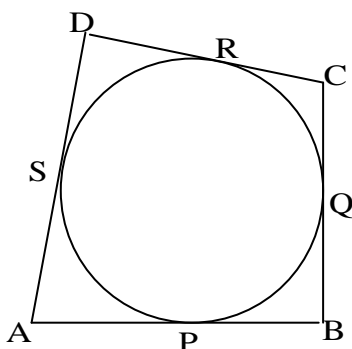
15



Pada segiempat ABCD di samping, jika  $AD = 26$  cm dan  $BC = 11$  cm maka tentukanlah keliling ABCD

Jawab

Jawab



Karena sisi segiempat ABCD adalah garis singgung lingkaran maka

$$AP = AS, PB = BQ, QC = CR \text{ dan } RD = DS$$

Sehingga

$$\text{Keliling} = AP + PB + BQ + QC + CR + RD + DS + SA$$

$$= 2 AS + 2.BQ + 2.QC + 2.DS$$

$$= 2 (AD + BC)$$

$$= 2 (26 + 11)$$

$$= 74 \text{ cm}$$