M A T R I K S

D. Invers Perkalian Matriks ordo (2 x 2)

Matriks identitas perkalian (dilambangkan dengan I) adalah sebuah matriks persegi yang memenuhi sifat: Jika A adalah matriks persegi yang berordo sama dengan I, maka berlaku

$$A \times I = I \times A = A$$

Untuk matriks identitas ordo (2 x 2) dapat dinyatakan sebagai $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Bukti :

Misalkan $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ maka $A \times I = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+0 & 0+b \\ c+0 & 0+d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = A$

Jika A sebuah matriks persegi maka terdapat invers perkalian dari matriks A yang dilambangkan dengan A^{-1} dan memenuhi sifat:

$$A \times A^{-1} = A^{-1} \times A = I$$

Untuk matriks ordo (2 x 2), invers dari matriks $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ dapat ditentukan sebagai berikut :

Misalkan $A^{-1} = \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix}$ maka $A \times A^{-1} = I$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} ap+br & aq+bs \\ cp+dr & cq+ds \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Sehingga : $ap + br = 1$ .... (1)

$cp + dr = 0$ .... (2)

$aq + bs = 0$ .... (3)

$cq + ds = 1$ .... (4)

Dari (1)(2)

$$\begin{array}{ll|lll} ap + br = 1 & (d) & \longrightarrow & adp + bdr = d \\ cp + dr = 0 & (b) & \longrightarrow & \underline{bcp + bdr = 0} \\ & & & adp - bcp = d \\ & & & (ad - bc)\,p = d \end{array}$$

jadi $p = \dfrac{d}{ad - bc}$

Dari (1)(2) $\left.\begin{array}{l} ap + br = 1 \\ cp + dr = 0 \end{array}\right| \begin{array}{l} (c) \longrightarrow \\ (a) \longrightarrow \end{array} \begin{array}{l} acp + bcr = c \\ \underline{acp + adr = 0} \end{array}$

$bcr - adr = c$

$adr - bcr = -c$

$(ad - bc)\ r = -c \qquad$ jadi $r = \dfrac{-c}{ad - bc}$

Dari (3)(4) $\left.\begin{array}{l} aq + bs = 0 \\ cq + ds = 1 \end{array}\right| \begin{array}{l} (d) \longrightarrow \\ (b) \longrightarrow \end{array} \begin{array}{l} adq + bds = 0 \\ \underline{bcq + bds = b} \end{array}$

$adq - bcq = -b$

$(ad - bc)\ q = -b \qquad$ jadi $q = \dfrac{-b}{ad - bc}$

Dari (3)(4) $\left.\begin{array}{l} aq + bs = 0 \\ cq + ds = 1 \end{array}\right| \begin{array}{l} (c) \longrightarrow \\ (a) \longrightarrow \end{array} \begin{array}{l} acq + bcs = 0 \\ \underline{acq + ads = a} \end{array}$

$bcs - ads = -a$

$ads - bcs = a$

$(ad - bc)\ s = a \qquad$ jadi $s = \dfrac{a}{ad - bc}$

Jadi : $A^{-1} = \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{d}{ad-bc} & \dfrac{-b}{ad-bc} \\ \dfrac{-c}{ad-bc} & \dfrac{a}{ad-bc} \end{bmatrix} = \dfrac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

maka invers dari A dirumuskan $A^{-1} = \dfrac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

dimana ad – bc dinamakan determinan.
Jika matriks A mempunyai determinan 0 maka A dikatakan matriks singular, yaitu matriks yang tidak mempunyai invers.

Terdapat beberapa sifat yang berkenaan dengan invers matriks, yaitu :

<u>Sifat 1</u>
Jika A adalah matriks berordo (2 x 2) dan k adalah bilangan real, maka
$(k.A)^{-1} = \frac{1}{k} A^{-1}$

Bukti

Misalkan A = $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, maka k.A = $k\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ka & kb \\ kc & kd \end{bmatrix}$

Sehingga $(k.A)^{-1} = \dfrac{1}{(ka)(kd) - (kb)(kc)} \begin{bmatrix} kd & -kb \\ -kc & ka \end{bmatrix}$

$= \dfrac{k}{k^2(ad-bc)} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

$= \dfrac{1}{k} . \dfrac{1}{(ad-bc)} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

$= \dfrac{1}{k} A^{-1}$

Sifat 2

Jika A adalah transpose matriks A maka berlaku $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$

Bukti

Jika A = $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, maka $A^t = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$ sehingga $(A^t)^{-1} = \dfrac{1}{ad - bc}\begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix}$ ....(1)

$A^{-1} = \dfrac{1}{ad - bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$ sehingga $(A^{-1})^t = \dfrac{1}{ad - bc}\begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix}$ ....(2)

Dari (1) dan (2) terbukti bahwa $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$

Sifat 2

Jika A adalah matriks berordo (2 x 2) maka berlaku $(A^{-1})^{-1}$ = A

Bukti

Misalkan : $(A^{-1})^{-1}$ = B .... (1)

Maka $A^{-1}(A^{-1})^{-1} = A^{-1}$. B (kedua ruas dikalikan dengan A^{-1} dari kiri)

I = A^{-1}. B

A x I = A x A^{-1}. B (Kedua ruas dikalikan dengan A)

A = I x B

A = B .... (2)

Dari (1) dan (2) terbukti bahwa $(A^{-1})^{-1}$ = A

Sifat 3

Jika A dan B adalah matriks berordo (2 x 2) maka berlaku : $(A \times B)^{-1} = B^{-1} \times A^{-1}$

Bukti

Misalkan $(A \times B)^{-1}$ = C ……………………………………………………………(1)

maka

$((A \times B)^{-1})^{-1} = C^{-1}$ (kedua ruas di inverskan)

A x B = C^{-1}

A^{-1} x A x B = $A^{-1} \times C^{-1}$ (Kedua ruas dikalikan dengan A^{-1} dari kiri)

I x B = $A^{-1} \times C^{-1}$

B = $A^{-1} \times C^{-1}$

B x C = $A^{-1} \times C^{-1}$ x C (Kedua ruas dikalikan dengan C dari kanan)

B x C = A^{-1} x I

B x C = A^{-1}

B^{-1} x B x C = $B^{-1} \times A^{-1}$ (Kedua ruas dikalikan dengan B^{-1} dari kiri)

I x C = $B^{-1} \times A^{-1}$

C = $B^{-1} \times A^{-1}$ ……………………………………………..………….. (2)

Dari (1) dan (2) diperoleh : $(A \times B)^{-1} = B^{-1} \times A^{-1}$

Sifat 4

Jika A, B dan C adalah matriks-matriks berordo (2 x 2) maka :

(1) Tidak berlaku sifat komutatif perkalian, sehingga $A \times B \neq B \times A$

(2) Berlaku sifat asosiatif perkalian, sehingga : $(A \times B) \times C = A \times (B \times C)$

(3) Berlaku sifat distributif, sehingga $A(B + C) = AB + AC$

Untuk lebih jelasnya akan diuraikan dalam contoh soal berikut ini

01. Tentukanlah invers setiap matriks berikut ini :

(a) $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ (b) $B = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$

Jawab

(a) $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ maka $A^{-1} = \dfrac{1}{(2)(3)-(5)(1)} \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

$$A^{-1} = \frac{1}{6-1} \begin{bmatrix} 5 & -4 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 5 & -4 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

Untuk membuktikannya harus ditunjukkan bahwa $A \times B = I$

Tinjau : $A \times B = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 6-5 & -10+10 \\ 3-3 & -5+6 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$= I$ Jadi terbukti bahwa A dan B saling invers

(b) $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$ maka $A^{-1} = \dfrac{1}{(2)(5)-(4)(3)} \begin{bmatrix} 5 & -4 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$

$$A^{-1} = \frac{1}{-2} \begin{bmatrix} 5 & -4 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -5/2 & 2 \\ 3/2 & -1 \end{bmatrix}$$

02. Tentukan invers setiap matriks berikut ini :

(a) A = $\begin{bmatrix} 1 & 3/2 \\ 3/4 & 5/4 \end{bmatrix}$ (b) B = $\begin{bmatrix} 32 & -64 \\ 16 & -48 \end{bmatrix}$

Jawab

(a) A = $\begin{bmatrix} 1 & 3/2 \\ 3/4 & 5/4 \end{bmatrix}$ = $\begin{bmatrix} 4/4 & 6/4 \\ 3/4 & 5/4 \end{bmatrix}$ = $\frac{1}{4}\begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$

maka A^{-1} = 4 . $\frac{1}{(4)(5)-(6)(3)}$ $\begin{bmatrix} 5 & -6 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$

A^{-1} = $\frac{4}{20-18}$ $\begin{bmatrix} 5 & -6 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$

A^{-1} = 2.$\begin{bmatrix} 5 & -6 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$ = $\begin{bmatrix} 10 & -12 \\ -6 & 8 \end{bmatrix}$

(b) B = $\begin{bmatrix} 32 & -64 \\ 16 & -48 \end{bmatrix}$ = 16.$\begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$

maka B^{-1} = $\frac{1}{16}$. $\frac{1}{(2)(-3)-(-4)(1)}$ $\begin{bmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

B^{-1} = $\frac{1}{16}$. $\frac{1}{-6+4}$ $\begin{bmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

B^{-1} = $\frac{1}{16}$. $\frac{1}{-2}$ $\begin{bmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

B^{-1} = $-\frac{1}{32}$.$\begin{bmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

B^{-1} = $\begin{bmatrix} 3/32 & -1/8 \\ 1/32 & -1/16 \end{bmatrix}$

03. Jika A = $\begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 6 & -4 \end{bmatrix}$ dan B = $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$, maka tentukanalah matriks hasil dari

$(A \text{ x } B)^{-1}$ x A

Jawab

$(A \text{ x } B)^{-1}$ x A = B^{-1} x A^{-1} x A

= B^{-1} x I

= B^{-1}

= $\frac{1}{(3)(3)-(2)(4)}$ $\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$

$$= \frac{1}{9-8}\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$$

04. Jika matriks A = $\begin{bmatrix} x-4 & 6-x \\ 3 & x-2 \end{bmatrix}$ merupakan matriks singular maka tentukanlah nilai x

Jawab

Jika A matriks singular maka det (A) = 0

Sehingga : det(A) = (x – 4)(x – 2) – (6 – x)3 = 0

x^2 – 2x – 4x + 8 – 18 + 3x = 0

x^2 – 3x – 10 = 0

(x – 5)(x + 2) = 0

Jadi x = –2 dan x = 5

05. Jika matriks A = $\begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 6 & -2 \end{bmatrix}$ adalah invers dari matriks B = $\begin{bmatrix} -1 & x+y \\ 2x+1 & 5/2 \end{bmatrix}$ maka tentukanlah nilai x dan y

Jawab

$$A^{-1} = B$$

$$\frac{1}{(5)(-2)-(-2)(6)}\begin{bmatrix} -2 & 2 \\ -6 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & x+y \\ 2x+1 & 5/2 \end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{-10+12}\begin{bmatrix} -2 & 2 \\ -6 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & x+y \\ 2x+1 & 5/2 \end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{2}\begin{bmatrix} -2 & 2 \\ -6 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & x+y \\ 2x+1 & 5/2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -3 & 5/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & x+y \\ 2x+1 & 5/2 \end{bmatrix}$$

Maka : 2x + 1 = –3 x + y = 1

2x = –4 –2 + y = 1

x = –2 y = 3