

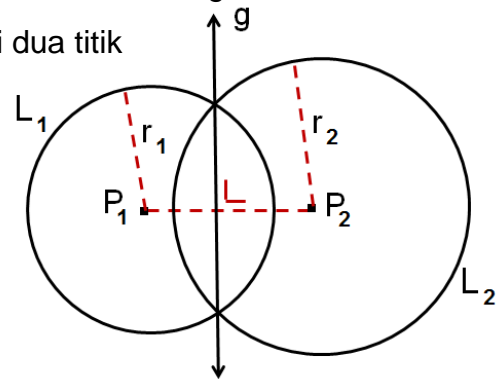
LINGKARAN

D. Hubungan Dua Lingkaran

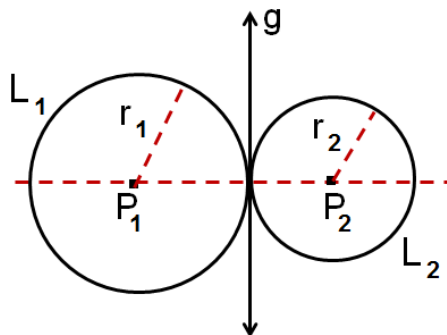
Kedudukan lingkaran L_1 terhadap L_2 ditentukan oleh nilai diskriminan $D = b^2 - 4ac$, hasil dari substitusi kedua persamaan lingkaran tersebut dengan ketentuan :

(1) Jika $D > 0$ kedua lingkaran berpotongan di dua titik

Dalam hal ini : $r_1 + r_2 > P_1P_2$

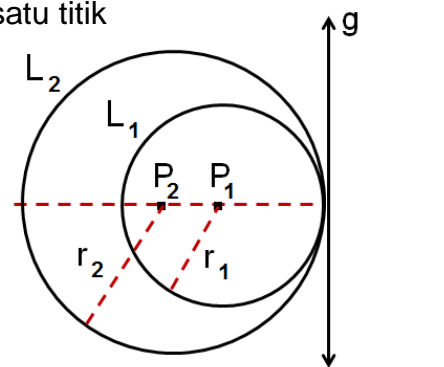


(2) Jika $D = 0$ kedua lingkaran bersinggungan di satu titik



Bersinggungan di luar

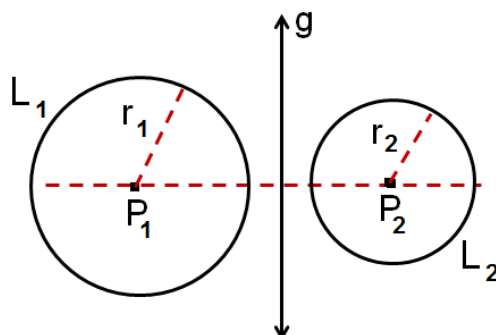
Dalam hal ini : $r_1 + r_2 = P_1P_2$



Bersinggungan di dalam

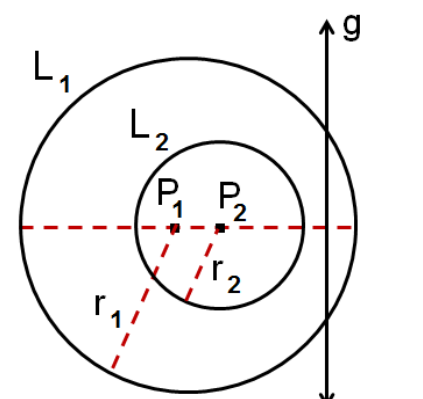
Dalam hal ini : $r_1 + r_2 > P_1P_2$

(3) Jika $D < 0$ kedua lingkaran saling lepas



Saling lepas di luar

Dalam hal ini : $r_1 + r_2 < P_1P_2$



Saling lepas di dalam

Dalam hal ini : $r_1 + r_2 > P_1P_2$

Sebagai contoh kedudukan lingkaran $x^2 + y^2 - 8x + 6y + 1 = 0$ terhadap lingkaran $x^2 + y^2 + 4x + 2y - 7 = 0$ adalah berpotongan di dua titik, karena :

$$\begin{array}{r} x^2 + y^2 - 8x + 6y + 1 = 0 \\ x^2 + y^2 + 4x + 2y - 7 = 0 \\ \hline \end{array}$$

$$-12x + 4y + 8 = 0 \text{ maka } y = 3x - 2$$

Sehingga $x^2 + (3x - 2)^2 - 8x + 6(3x - 2) + 1 = 0$

$$x^2 + 9x^2 - 12x + 4 - 8x + 18x - 12 + 1 = 0$$

$$10x^2 - 2x - 7 = 0$$

Ambil $D = (-2)^2 - 4(10)(-7) = 284 > 0$

Karena $D > 0$ maka kedua lingkaran berpotongan di dua titik

Untuk lebih jelasnya, pelajailah contoh soal berikut ini:

01. Bagaimanakah kedudukan lingkaran $x^2 + y^2 + 4x + 2y - 15 = 0$ dan lingkaran $x^2 + y^2 - 8x - 4y + 15 = 0$

Jawab

$$x^2 + y^2 + 4x + 2y - 15 = 0$$

$$x^2 + y^2 - 8x - 4y + 15 = 0$$

$$12x + 6y - 30 = 0 \text{ maka } y = 5 - 2x$$

Sehingga $x^2 + (5 - 2x)^2 + 4x + 2(5 - 2x) - 15 = 0$

$$x^2 + 25 - 20x + 4x^2 + 4x + 10 - 4x - 15 = 0$$

$$5x^2 - 20x + 20 = 0$$

$$x^2 - 4x + 4 = 0$$

Ambil $D = (-4)^2 - 4(1)(4) = 0$

Karena $D = 0$ maka kedua lingkaran bersinggungan

Koordinat pusat dan jari-jari lingkaran $x^2 + y^2 + 4x + 2y - 15 = 0$

pusat $P(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2})$

Jari-jari $r_1 = \sqrt{\frac{A^2}{4} + \frac{B^2}{4} - C}$

$$P(-\frac{4}{2}, -\frac{2}{2})$$

$$r_1 = \sqrt{\frac{4^2}{4} + \frac{2^2}{4} - (-15)}$$

$$P(-2, -1)$$

$$r_1 = \sqrt{4 + 1 + 15}$$

$$r_1 = 2\sqrt{5}$$

Koordinat pusat dan jari-jari lingkaran $x^2 + y^2 - 8x - 4y + 15 = 0$

pusat $P(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2})$

Jari-jari $r_2 = \sqrt{\frac{A^2}{4} + \frac{B^2}{4} - C}$

$$P(-\frac{(-8)}{2}, -\frac{(-4)}{2})$$

$$r_2 = \sqrt{\frac{(-8)^2}{4} + \frac{(-4)^2}{4} - 15}$$

$$P(4, 2)$$

$$r_2 = \sqrt{16 + 4 - 15}$$

$$r_2 = \sqrt{5}$$

Jarak kedua pusat lingkaran adalah : $P_1P_2 = \sqrt{(4 - (-2))^2 + (2 - (-1))^2}$

$$P_1P_2 = \sqrt{6^2 + 3^2}$$

$$P_1P_2 = \sqrt{45}$$

Karena $r_1 + r_2 = 2\sqrt{5} + \sqrt{5} = 3\sqrt{5} = \sqrt{45} = P_1P_2$ maka kedua lingkaran bersinggungan diluar

02. Bagaimanakah kedudukan lingkaran $x^2 + y^2 + 5x - 3y - 14 = 0$ dan lingkaran $x^2 + y^2 + 4x - 2y - 12 = 0$? Jika berpotongan atau bersinggungan, tentukanlah titik potong atau titik singgungannya

Jawab

$$x^2 + y^2 + 5x - 3y - 14 = 0$$

$$x^2 + y^2 + 4x - 2y - 12 = 0$$

$$x - y - 2 = 0 \text{ maka } y = x - 2$$

$$\text{Sehingga } x^2 + (x - 2)^2 + 5x - 3(x - 2) - 14 = 0$$

$$x^2 + x^2 - 4x + 4 + 5x - 3x + 6 - 14 = 0$$

$$2x^2 - 2x - 4 = 0$$

$$x^2 - x - 2 = 0$$

Ambil $D = (-1)^2 - 4(1)(-2) = 9 > 0$ maka kedua lingkaran berpotongan di dua titik

Titik potongnya : $x^2 - x - 2 = 0$

$$(x - 2)(x + 1) = 0$$

$$x_1 = 2 \text{ dan } x_2 = -1$$

Untuk $x_1 = 2$ maka $y_1 = 2 - 2 = 0$ titiknya $(2, 0)$

Untuk $x_2 = -1$ maka $y_2 = 2 - (-1) = 3$ titiknya $(-1, 3)$

03. Jika lingkaran $(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 4$ memotong lingkaran $x^2 + y^2 = 4$ di titik A dan B, maka tentukanlah jarak A dan B

Jawab

$$(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 4$$

$$x^2 - 4x + 4 + y^2 - 4y + 4 = 4$$

$$x^2 + y^2 - 4x - 4y + 4 = 0 \dots\dots\dots (1)$$

$$x^2 + y^2 = 4 \dots\dots\dots (2)$$

(1) dan (2) disubstitusi, diperoleh : $x^2 + y^2 - 4x - 4y + 4 = 0$

$$4 - 4x - 4y + 4 = 0$$

$$y = x + 2$$

sehingga : $x^2 + y^2 = 4$

$$x^2 + (x + 2)^2 = 4$$

$$x^2 + x^2 + 4x + 4 = 4$$

$$2x^2 + 4x = 0$$

$$2x(x + 2) = 0$$

$$x_1 = 0 \text{ dan } x_2 = -2$$

Untuk $x_1 = 0$ maka $y_1 = 0 + 2 = 2$ titiknya $A(0, 2)$

Untuk $x_2 = -2$ maka $y_2 = -2 + 2 = 0$ titiknya $B(-2, 0)$

$$\begin{aligned}\text{Jarak AB adalah} &= \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} \\ &= \sqrt{(-2 - 0)^2 + (0 - 2)^2} \\ &= \sqrt{8} \\ &= 2\sqrt{2}\end{aligned}$$

04. Jika lingkaran L bersinggungan diluar dengan lingkaran $x^2 + y^2 + 6x - 4y - 12 = 0$. dan lingkaran L tersebut berpusat di $A(4, 2)$ maka tentukanlah persamaan lingkaran L tersebut !

Jawab

Lingkaran : $x^2 + y^2 + 6x - 4y - 12 = 0$ berpusat di P dan jari-jari r_1

$$\text{pusat } P\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right)$$

$$P\left(-\frac{6}{2}, -\frac{(-4)}{2}\right)$$

$$P(-3, 2)$$

$$\text{Jari-jari } r_1 = \sqrt{\frac{A^2}{4} + \frac{B^2}{4} - C}$$

$$r_1 = \sqrt{\frac{6^2}{4} + \frac{(-4)^2}{4} - (-12)}$$

$$r_1 = \sqrt{9 + 4 + 12}$$

$$r_1 = 5$$

Lingkaran :L berpusat di $A(4, 2)$ dan jari-jari r_2

$$\text{Sehingga } r_1 + r_2 = \sqrt{(x_P - x_A)^2 + (y_P - y_A)^2}$$

$$5 + r_2 = \sqrt{(-3 - 4)^2 + (2 - 2)^2}$$

$$5 + r_2 = \sqrt{49}$$

$$5 + r_2 = 7$$

$$r_2 = 2$$

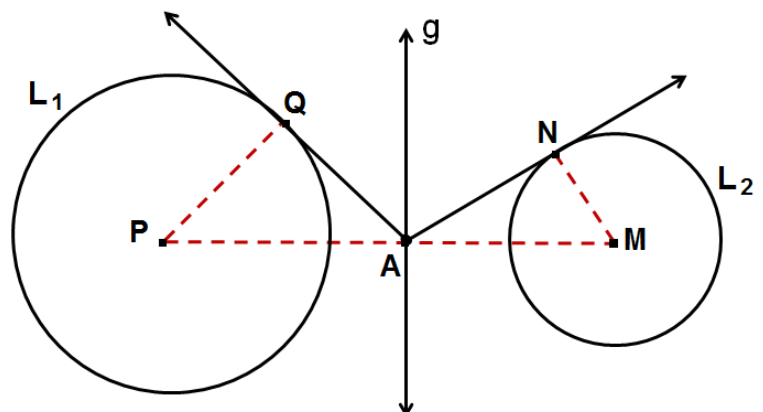
Jadi L berpusat di $A(4, 2)$ dan jari-jari 2, persamaannya :

$$(x - 4)^2 + (y - 2)^2 = 2^2$$

$$x^2 - 8x + 16 + y^2 - 4y + 4 = 4$$

$$x^2 + y^2 - 8x - 4y + 16 = 0$$

Garis kuasa dua lingkaran adalah suatu garis yang merupakan tempat kedudukan titik-titik yang mempunyai kuasa sama terhadap kedua lingkaran tersebut.



AQ adalah kuasa titik A pada lingkaran L_1 dan AN adalah kuasa titik A terhadap lingkaran L_2 . Sehingga berlaku $AQ = AN$

Jika $L_1 = x^2 + y^2 + A_1x + B_1y + C_1 = 0$ dan $L_2 = x^2 + y^2 + A_2x + B_2y + C_2 = 0$ dan $A(x_0, y_0)$ adalah salah satu titik pada garis kuasanya, maka berlaku :

$$AQ = AN$$

$$x_0^2 + y_0^2 + A_1x_0 + B_1y_0 + C_1 = x_0^2 + y_0^2 + A_2x_0 + B_2y_0 + C_2$$

$$A_1x_0 + B_1y_0 + C_1 = A_2x_0 + B_2y_0 + C_2$$

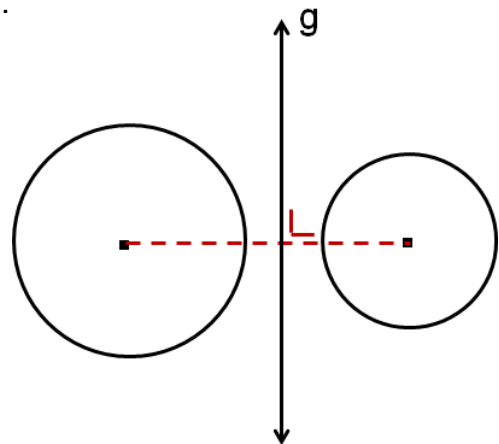
$$A_1x_0 - A_2x_0 + B_1y_0 - B_2y_0 = C_2 - C_1$$

$$(A_1 - A_2)x_0 + (B_1 - B_2)y_0 = (C_2 - C_1)$$

Jadi Persamaan garis kuasa pada lingkaran $L_1 = x^2 + y^2 + A_1x + B_1y + C_1 = 0$ dan $L_2 = x^2 + y^2 + A_2x + B_2y + C_2 = 0$ dirumuskan :

$$(A_1 - A_2)x + (B_1 - B_2)y = (C_2 - C_1)$$

garis kuasa dua lingkaran selalu tegak lurus dengan garis yang menghubungkan kedua pusat lingkaran



Untuk lebih jelasnya, pelajailah contoh soal berikut ini:

05. Tentukanlah persamaan garis kuasa yang mempunyai kuasa sama terhadap lingkaran $x^2 + y^2 - 10x + 4y + 20 = 0$ dan $x^2 + y^2 + 6x + 8y + 8 = 0$

Jawab

$$x^2 + y^2 - 10x + 4y + 20 = 0$$

$$x^2 + y^2 + 6x + 8y + 8 = 0$$

$$A_1 = -10$$

$$A_2 = 6$$

$$B_1 = 4$$

$$B_2 = 8$$

$$C_1 = 20$$

$$C_2 = 8$$

Sehingga garis kuasa : $(A_1 - A_2)x + (B_1 - B_2)y = (C_2 - C_1)$

$$(-10 - 6)x + (4 - 8)y = (8 - 20)$$

$$-16x + (-4)y = -12$$

$$4x + y = 3$$

06. Tentukan titik pada sumbu Y yang mempunyai kuasa sama terhadap lingkaran $(x + 5)^2 + (y + 6)^2 = 34$ dan $(x + 3)^2 + (y - 1)^2 = 25$

Jawab

$$x^2 + y^2 + 10x + 12y + 25 = 0$$

$$x^2 + y^2 + 6x - 2y - 15 = 0$$

$$A_1 = 10$$

$$A_2 = 6$$

$$B_1 = 12$$

$$B_2 = -2$$

$$C_1 = 27$$

$$C_2 = -15$$

Sehingga garis kuasa : $(A_1 - A_2)x + (B_1 - B_2)y = (C_2 - C_1)$
 $(10 - 6)x + (12 - [-2])y = (-15 - 27)$
 $4x + 14y = -42$
 $2x + 7y = -21$

Titik potong dengan sumbu-Y syaratnya $x = 0$

Sehingga : $2(0) + 7y = -21$
 $7y = -21$
 $y = -3$

Jadi titiknya adalah $(0, -3)$

07. Titik $P(11, a)$ mempunyai kuasa sama terhadap lingkaran $x^2 + y^2 + 8x - 4y - 10 = 0$ dan lingkaran $x^2 + y^2 + 6x + 2y - 6 = 0$, Tentukanlah nilai a

Jawab

$$x^2 + y^2 + 8x - 4y - 10 = 0$$

$$A_1 = 8$$

$$B_1 = -4$$

$$C_1 = -10$$

$$x^2 + y^2 + 6x + 2y - 6 = 0$$

$$A_2 = 6$$

$$B_2 = 2$$

$$C_2 = -6$$

Sehingga garis kuasa : $(A_1 - A_2)x + (B_1 - B_2)y = (C_2 - C_1)$

$$(8 - 6)x + (-4 - 2)y = (-6 - [-10])$$

$$2x - 6y = 4$$

$$x - 3y = 2$$

Titik $P(11, a)$ terletak pada garis kuasa $x - 3y = 2$, sehingga :

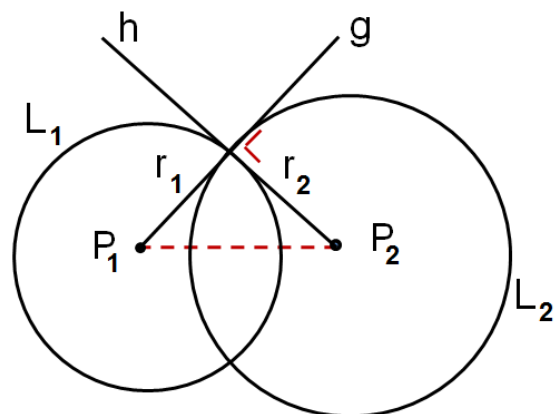
$$11 - 3a = 2$$

$$-3a = -9$$

$$a = 3$$

Dua lingkaran L_1 dan L_2 dikatakan **ortogonal** jika kedua lingkaran itu saling berpotongan dimana terdapat garis singgung g dan h yang saling tegak lurus.

Sehingga berlaku : $P_1P_2^2 = r_1^2 + r_2^2$



Sebagai contoh :

08. Jika dua lingkaran $x^2 + y^2 + 8x - 10y + 5 = 0$ dan $x^2 + y^2 - 12x - 10y + p = 0$ saling ortogonal, maka nilai tentukan nilai p

Jawab

Pusat dan jari-jari lingkaran $x^2 + y^2 + 8x - 10y + 5 = 0$ adalah :

pusat $P_1(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2})$

Jari-jari $r_1 = \sqrt{\frac{A^2}{4} + \frac{B^2}{4} - C}$

$P_1(-\frac{8}{2}, -\frac{(-10)}{2})$

$r_1 = \sqrt{\frac{8^2}{4} + \frac{(-10)^2}{4} - 5}$

$P_1(-4, 5)$

$r_1 = \sqrt{16 + 25 - 5}$

$r_1 = 6$

Pusat dan jari-jari lingkaran $x^2 + y^2 - 12x - 10y + p = 0$ adalah :

pusat $P_2(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2})$

Jari-jari $r_2 = \sqrt{\frac{A^2}{4} + \frac{B^2}{4} - C}$

$P_2(-\frac{(-12)}{2}, -\frac{(-10)}{2})$

$r_2 = \sqrt{\frac{(-12)^2}{4} + \frac{(-10)^2}{4} - p}$

$P_2(6, 5)$

$r_2 = \sqrt{36 + 25 - p}$

$r_2 = \sqrt{61 - p}$

Sehingga : $P_1P_2^2 = r_1^2 + r_2^2$

$$\left(\sqrt{(6 - (-4))^2 + (5 - 5)^2}\right)^2 = 6^2 + (\sqrt{61 - p})^2$$

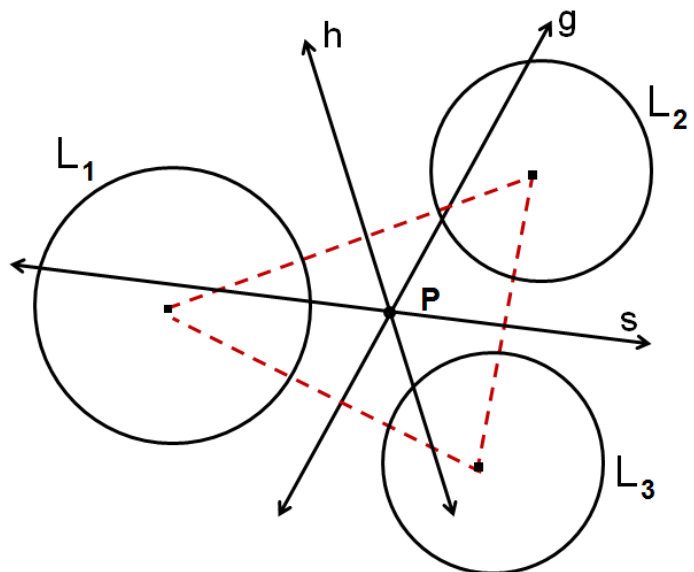
$$100 + 0 = 36 + 61 - p$$

$$100 = 97 - p$$

$$p = -3$$

Titik Kuasa terhadap tiga lingkaran L_1 , L_2 dan L_3 adalah titik potong ketiga garis kuasa lingkaran-lingkaran itu, sehingga titik kuasa tersebut mempunyai kuasa sama terhadap ketiga lingkaran L_1 , L_2 dan L_3

Jika g adalah garis kuasa terhadap lingkaran L_1 dan L_3
 h adalah garis kuasa terhadap lingkaran L_1 dan L_2
 s adalah garis kuasa terhadap lingkaran L_2 dan L_3
 maka P adalah titik kuasa terhadap lingkaran L_1 , L_2 dan L_3



Untuk pemahaman lebih lanjut ikutilah contoh soal berikut ini :

09. Tentukanlah titik kuasa terhadap tiga lingkaran $x^2 + y^2 + 5x + 3y - 7 = 0$
 $x^2 + y^2 + 4x + 2y - 8 = 0$
 $x^2 + y^2 + x + 4y + 4 = 0$

Jawab

Misalkan g adalah garis kuasa terhadap lingkaran $x^2 + y^2 + 5x + 3y - 7 = 0$ dan $x^2 + y^2 + 4x + 2y - 8 = 0$, maka

$$(A_1 - A_2)x + (B_1 - B_2)y = (C_2 - C_1)$$

$$(5 - 4)x + (3 - 2)y = (-8 - [-7])$$

$$x + y = -1 \dots\dots\dots (1)$$

Misalkan h adalah garis kuasa terhadap lingkaran $x^2 + y^2 + 5x + 3y - 7 = 0$ dan $x^2 + y^2 + x + 4y + 4 = 0$, maka

$$(A_1 - A_2)x + (B_1 - B_2)y = (C_2 - C_1)$$

$$(5 - 1)x + (3 - 4)y = (4 - [-7])$$

$$4x + (-1)y = 11$$

$$4x - y = 11 \dots\dots\dots (2)$$

Eliminasi (1) dan (2) diperoleh :

$$\begin{array}{r} x + y = -1 \\ 4x - y = 11 \\ \hline 5x = 10 \end{array}$$

maka $x = 2$ sehingga $2 + y = -1$
 $y = -3$

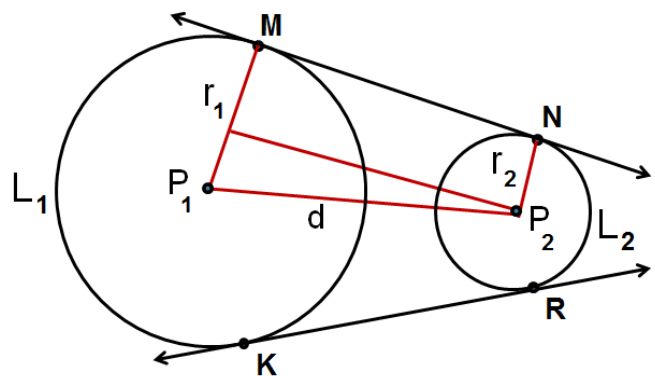
Jadi titik kuasanya (2, -3)

Garis singgung persekutuan pada dua lingkaran L_1 dan L_2 adalah suatu garis yang menyinggung L_1 dan menyinggung pula L_2 . Terdapat dua macam garis singgung persekutuan, yaitu :

- (1) Garis singgung persekutuan luar
 Panjang garis singgung persekutuan luar lingkaran L_1 dan L_2 ditentukan dengan rumus :

$$KR = MN = \sqrt{d^2 - (r_1 - r_2)^2}$$

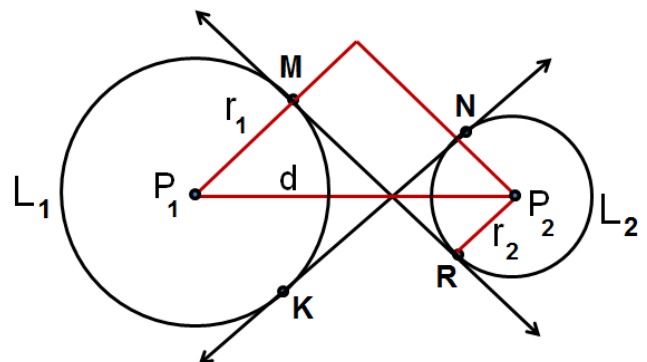
Dimana $d = P_1P_2$



- (2) Garis singgung persekutuan dalam
 Panjang ruas garis persekutuan dalam lingkaran L_1 dan L_2 ditentukan dengan rumus :

$$KN = MR = \sqrt{d^2 - (r_1 + r_2)^2}$$

Dimana $d = P_1P_2$



Untuk pemahaman lebih lanjut ikutilah contoh soal berikut ini :

10. Jika g adalah garis singgung persekutuan luar lingkaran $x^2 + y^2 + 2x - 8y - 32 = 0$ dan $x^2 + y^2 - 10x - 24y + 168 = 0$ serta A dan B adalah titik singgung g pada kedua lingkaran itu maka tentukanlah panjang ruas garis AB

Jawab

Pusat dan jari-jari lingkaran $x^2 + y^2 + 2x - 8y - 32 = 0$ adalah :

$$\text{pusat } P_1\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right)$$

$$P_1\left(-\frac{2}{2}, -\frac{(-8)}{2}\right)$$

$$P_1(-1, 4)$$

$$\text{Jari-jari } r_1 = \sqrt{\frac{A^2}{4} + \frac{B^2}{4} - C}$$

$$r_1 = \sqrt{\frac{2^2}{4} + \frac{(-8)^2}{4} - (-32)}$$

$$r_1 = \sqrt{1 + 16 + 32}$$

$$r_1 = 7$$

Pusat dan jari-jari lingkaran $x^2 + y^2 - 10x - 24y + 168 = 0$ adalah :

$$\text{pusat } P_2\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right)$$

$$P_2\left(-\frac{(-10)}{2}, -\frac{(-24)}{2}\right)$$

$$P_2(5, 12)$$

$$\text{Jari-jari } r_2 = \sqrt{\frac{A^2}{4} + \frac{B^2}{4} - C}$$

$$r_2 = \sqrt{\frac{(-10)^2}{4} + \frac{(-24)^2}{4} - 168}$$

$$r_2 = \sqrt{25 + 144 - 168}$$

$$r_2 = 1$$

$$\text{Sehingga : } d = P_1P_2 = \sqrt{(5 - [-1])^2 + (12 - 4)^2}$$

$$d = P_1P_2 = \sqrt{36 + 64}$$

$$d = P_1P_2 = 10$$

$$\text{Jadi } AB = \sqrt{d^2 - (r_1 + r_2)^2}$$

$$AB = \sqrt{10^2 - (7 + 1)^2}$$

$$AB = \sqrt{100 - 64}$$

$$AB = 6 \text{ satuan}$$

11. Panjang ruas garis singgung persekutuan luar yang menghubungkan dua titik singgung lingkaran $x^2 + y^2 - 6x + 4y - 3 = 0$ dan $x^2 + y^2 - 4y + p = 0$ sama dengan 4 cm. Tentukanlah nilai p

Jawab

Pusat dan jari-jari lingkaran $x^2 + y^2 - 6x + 4y - 3 = 0$ adalah :

$$\text{pusat } P_1\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right)$$

$$P_1\left(-\frac{(-6)}{2}, -\frac{4}{2}\right)$$

$$P_1(3, -2)$$

$$\text{Jari-jari } r_1 = \sqrt{\frac{A^2}{4} + \frac{B^2}{4} - C}$$

$$r_1 = \sqrt{\frac{(-6)^2}{4} + \frac{4^2}{4} - (-3)}$$

$$r_1 = \sqrt{9 + 4 + 3}$$

$$r_1 = 4$$

Pusat dan jari-jari lingkaran $x^2 + y^2 - 4y + p = 0$ adalah :

$$\text{pusat } P_2\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right)$$

$$\text{Jari-jari } r_2 = \sqrt{\frac{A^2}{4} + \frac{B^2}{4} - C}$$

$$P_2\left(-\frac{0}{2}, -\frac{(-4)}{2}\right)$$

$$r_2 = \sqrt{\frac{0^2}{4} + \frac{(-4)^2}{4} - p}$$

$$P_2(0, 2)$$

$$r_2 = \sqrt{4 - p}$$

$$\text{Sehingga : } d = P_1P_2 = \sqrt{(0-3)^2 + (2-(-2))^2}$$

$$d = P_1P_2 = \sqrt{9+16}$$

$$d = P_1P_2 = 5$$

$$\text{Panjang ruas garis singgung persekutuan luar} = \sqrt{d^2 - (r_1 + r_2)^2}$$

$$4 = \sqrt{5^2 - (4 + \sqrt{4-p})^2}$$

$$16 = 25 - (4 + \sqrt{4-p})^2$$

$$(4 + \sqrt{4-p})^2 = 25 - 16$$

$$(4 + \sqrt{4-p})^2 = 9$$

$$4 + \sqrt{4-p} = 3$$

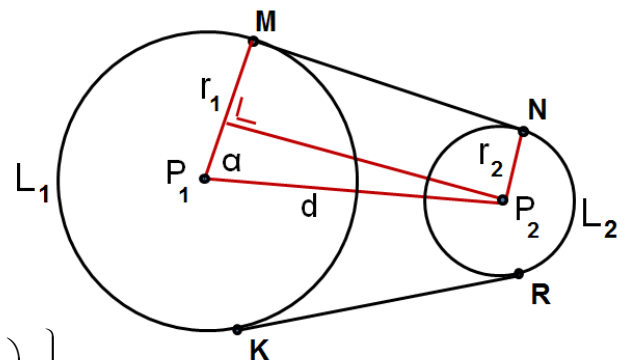
$$\sqrt{4-p} = -1$$

$$4 - p = 1$$

$$p = 3$$

Rumus menentukan Panjang sabuk Lilitan pada dua lingkaran adalah sebagai berikut :

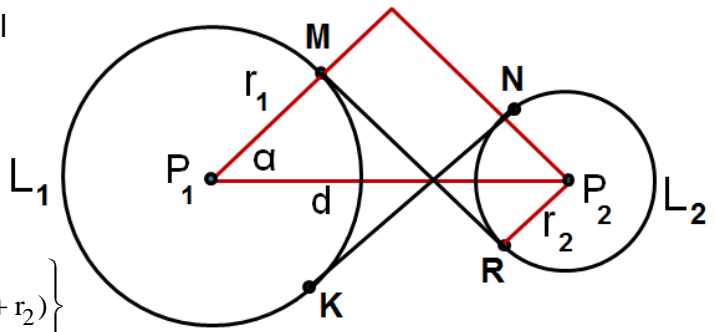
Panjang sabuk lilitan luar minimal yang menghubungkan lingkaran L_1 dan L_2 ditentukan dengan rumus :



$$2\sqrt{d^2 - (r_1 - r_2)^2} + 2\pi \left\{ \left(\frac{360^\circ - 2\alpha}{360^\circ} \right) r_1 + \left(\frac{2\alpha}{360^\circ} \right) r_2 \right\}$$

Dimana $d = P_1P_2$

Panjang sabuk lilitan dalam minimal yang menghubungkan lingkaran L_1 dan L_2 ditentukan dengan rumus :



$$2\sqrt{d^2 - (r_1 + r_2)^2} + 2\pi \left\{ \left(\frac{360^\circ - 2\alpha}{360^\circ} \right) (r_1 + r_2) \right\}$$

Dimana $d = P_1P_2$

Untuk pemahaman lebih lanjut ikutilah contoh soal berikut ini :

12. Lingkaran L_1 dan L_2 masing-masing berjari-jari 8 cm dan 2 cm, serta jarak kedua pusat lingkaran itu sama dengan 12 cm. Tentukan panjang sabuk lilitan luar minimal yang diperlukan untuk menghubungkan lingkaran L_1 dan L_2

Jawab

Diketahui : $d = 12$

$r_1 = 8$

$r_2 = 2$

Ditanya : panjang sabuk lilitan luar

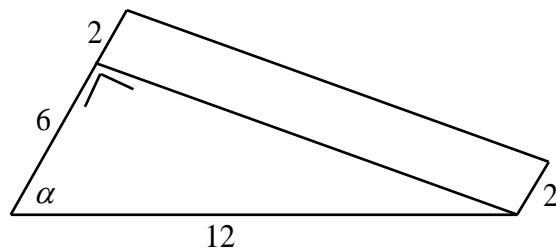
Jawab

$\cos \alpha = 6/12$

$\cos \alpha = 1/2$

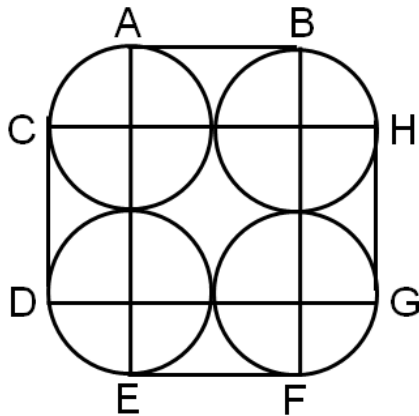
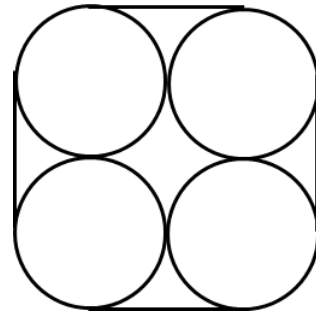
Maka $\alpha = 60^\circ$

Sehingga



$$\begin{aligned} \text{Sabuk lilitan luar} &= 2\sqrt{d^2 - (r_1 - r_2)^2} + 2\pi \left\{ \left(\frac{360^\circ - 2\alpha}{360^\circ} \right) r_1 + \left(\frac{2\alpha}{360^\circ} \right) r_2 \right\} \\ &= 2\sqrt{12^2 - (8 - 2)^2} + 2\pi \left\{ \left(\frac{360^\circ - 2(60^\circ)}{360^\circ} \right) (8) + \left(\frac{2(60^\circ)}{360^\circ} \right) (2) \right\} \\ &= 2\sqrt{144 - 36} + 2\pi \left\{ \left(\frac{240^\circ}{360^\circ} \right) (8) + \left(\frac{120^\circ}{360^\circ} \right) (2) \right\} \\ &= 2\sqrt{108} + 2\pi \left\{ \left(\frac{2}{3} \right) (8) + \left(\frac{1}{3} \right) (2) \right\} \\ &= 2(6\sqrt{3}) + 2\pi(6) \\ &= 12\sqrt{3} + 12\pi \end{aligned}$$

13. Empat buah pipa masing-masing dengan garis tengah 6 cm diikat erat seperti gambar berikut ini. Arah tali pengikat tegak lurus pada arah panjang pipa. Tentukan panjang tali minimal yang memiliki pipa-pipa itu
Jawab



$$\text{Panjang } AB = CD = EF = GH = 6 \text{ cm}$$

$$\text{Busur } AC = DE = FG = HB = \frac{1}{4}(2\pi(6)) = 3\pi$$

$$\begin{aligned} \text{Jadi panjang tali minimal} &= 4(6 + 3\pi) \\ &= 24 + 12\pi \text{ cm} \end{aligned}$$