

PERSAMAAN DAN FUNGSI KUADRAT

C. Grafik Fungsi Kuadrat

Bentuk umum fungsi kuadrat adalah $f(x) = ax^2 + bx + c = 0$ dimana a , b , dan c adalah bilangan real dan $a \neq 0$.

Grafik fungsi kuadrat ini gambarnya berbentuk parabola. Untuk menggambarinya diperlukan langkah-langkah sebagai berikut :

- (1) Menentukan titik potong dengan sumbu x , syaratnya $y = 0$

sehingga $ax^2 + bx + c = 0$

$$(x - x_1)(x - x_2) = 0$$

Titiknya $(x_1, 0)$ dan $(x_2, 0)$

- (2) Menentukan titik potong dengan sumbu y , syaratnya $x = 0$ sehingga $y = a(0)^2 + b(0) + c = c$

Titiknya $(0, c)$

- (3) Menentukan persamaan sumbu simetri, yakni : $x = x_P$, dimana x_P adalah titik

tengah x_1 dan x_2 . Sehingga : $x_P = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)$

$$x_P = \frac{1}{2}\left(\frac{-b}{a}\right)$$

$$x_P = \frac{-b}{2a}$$

Jadi persamaan sumbu simetri adalah : $x = \frac{-b}{2a}$

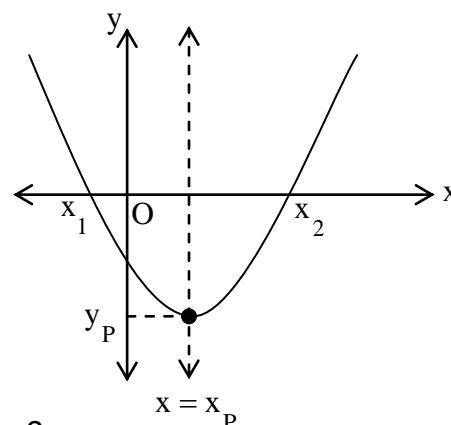
- (4) Menentukan nilai ekstrim atau nilai maksimum/minimum fungsi, yakni y_P

Dimana $y_P = ax_P^2 + bx_P + c$

$$y_P = a\left(\frac{-b}{2a}\right)^2 + b\left(\frac{-b}{2a}\right) + c$$

$$y_P = \frac{ab^2}{4a^2} - \frac{b^2}{2a} + c$$

$$y_P = \frac{ab^2}{4a^2} - \frac{2ab^2}{4a^2} + \frac{4a^2c}{4a^2}$$



$$y_P = \frac{-ab^2 + 4a^2c}{4a^2}$$

$$y_P = \frac{b^2 - 4ac}{-4a}$$

Jadi nilai maksimum/minimum fungsi adalah $y = \frac{b^2 - 4ac}{-4a}$

Catatan: Jika $a > 0$ maka nilai minimum dan jika $a < 0$ maka nilai maksimum

(5) Menentukan titik balik fungsi (maksimum/minimum), yaitu $P\left(\frac{-b}{2a}, \frac{b^2 - 4ac}{-4a}\right)$

(6) Menggambar grafik fungsi

Untuk lebih jelasnya ikutilah contoh soal berikut ini :

01 Lukislah grafik fungsi $f(x) = x^2 - 2x - 8$

Jawab

Titik potong dengan sumbu-X, yakni $x^2 - 2x - 8 = 0$

$$(x - 4)(x + 2) = 0$$

$$x_1 = 4 \text{ dan } x_2 = -2$$

Titiknya $(-2, 0)$ dan $(4, 0)$

Titik potong dengan sumbu-Y, yakni $y = x^2 - 2x - 8$

$$y = (0)^2 - 2(0) - 8 = -8 \quad \text{Titiknya } (0, -8)$$

Persamaan sumbu simetri, yakni $x = \frac{-b}{2a}$

$$x = \frac{-(-2)}{2(1)}$$

$$x = 1$$

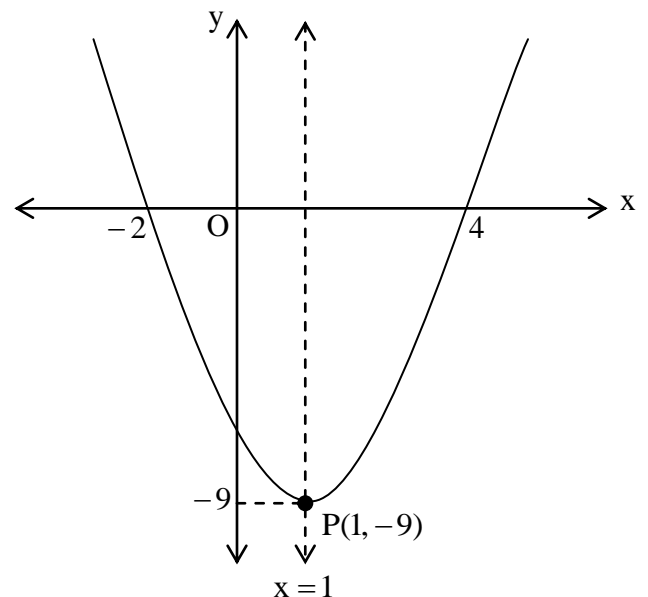
Persamaan sumbu simetri, yakni $y = \frac{b^2 - 4ac}{-4a}$

$$x = \frac{(-2)^2 - 4(1)(-8)}{-4(1)}$$

$$x = -9$$

Titik balik minimumnya di $P(1, -9)$

Gambar grafiknya :



02 Lukislah grafik fungsi $f(x) = -x^2 + 6x - 5$

Jawab

Titik potong dengan sumbu-X, yakni $-x^2 + 6x - 5 = 0$

$$x^2 - 6x + 5 = 0$$

$$(x - 1)(x - 5) = 0$$

$$x_1 = 1 \text{ dan } x_2 = 5$$

Titiknya (1, 0) dan (5, 0)

Titik potong dengan sumbu-Y, yakni $y = -x^2 + 6x - 5$

$$y = -(0)^2 + 6(0) - 5 = -5$$

Titiknya (0, -5)

Persamaan sumbu simetri, yakni $x = \frac{-b}{2a}$

$$x = \frac{-6}{2(-1)}$$

$$x = 3$$

Persamaan sumbu simetri, yakni $y = \frac{b^2 - 4ac}{-4a}$

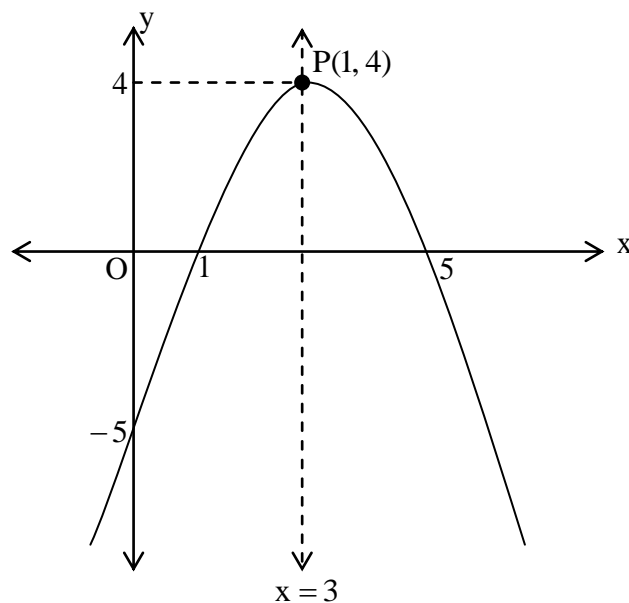
$$x = \frac{6^2 - 4(-1)(-5)}{-4(-1)}$$

$$x = \frac{36 - 20}{4}$$

$$x = 4$$

Titik balik minimumnya di P(3, 4)

Gambar grafiknya :



03. Lukislah grafik fungsi $f(x) = 2x^2 - 4x + 5$

Jawab

Titik potong dengan sumbu-X, yakni $2x^2 - 4x + 5 = 0$

$$\text{Uji } D = b^2 - 4ac$$

$$D = (-4)^2 - 4(2)(5)$$

$$D = -24 < 0$$

Akar-akarnya tidak real

Tidak ada titik potong dengan sumbu-X

Titik potong dengan sumbu-Y, yakni $y = 2x^2 - 4x + 5$

$$y = 2(0)^2 - 4(0) + 5 = 5$$

Titiknya (0, 5)

Persamaan sumbu simetri, yakni $x = \frac{-b}{2a}$

$$x = \frac{-(-4)}{2(2)}$$

$$x = -1$$

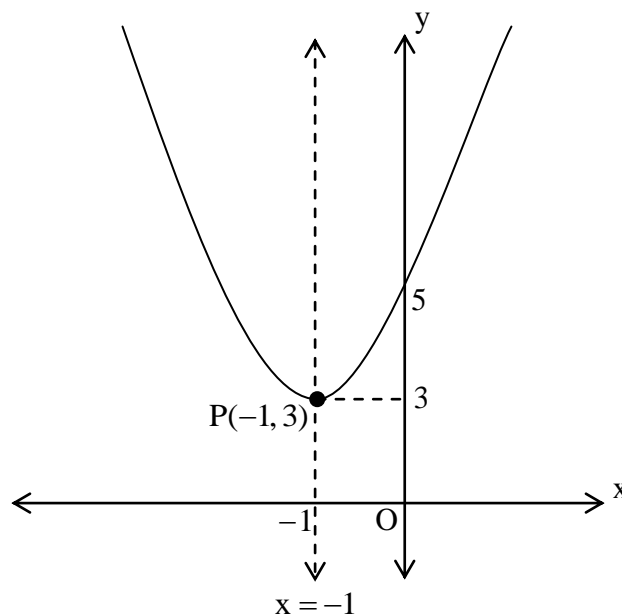
Persamaan sumbu simetri, yakni $y = \frac{b^2 - 4ac}{-4a}$

$$x = \frac{(-4)^2 - 4(2)(5)}{-4(2)}$$

$$x = 3$$

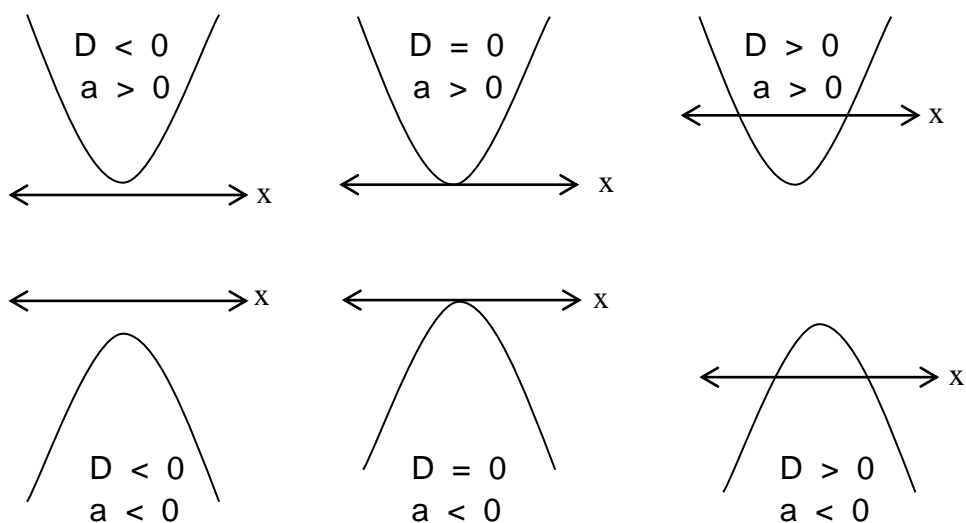
Titik balik minimumnya di $P(-1, 3)$

Gambar grafiknya :



Fungsi kuadrat $f(x) = ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$ dengan diskriminan $D = b^2 - 4ac$ akan mempunyai sifat-sifat sebagai berikut :

- (1) Memotong sumbu x di dua titik jika $D > 0$
- (2) Menyinggung sumbu x jika $D = 0$
- (3) Tidak memotong atau menyinggung sumbu x jika $D < 0$
- (4) Membuka ke atas jika $a > 0$
- (5) Membuka ke bawah jika $a < 0$
- (6) Seluruh fungsinya berada di atas sumbu x (definit positif) jika $D < 0$ dan $a > 0$
- (7) Seluruh fungsinya berada di bawah sumbu x (definit negatif) jika $D < 0$ dan $a < 0$



Terkadang suatu fungsi kuadrat dapat disusun jika diketahui beberapa unsurnya, yaitu

- a. Jika fungsi kuadrat diketahui titik potong dengan sumbu x yaitu $(x_1, 0)$ dan $(x_2, 0)$ maka persamaannya adalah $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$
- b. Jika suatu fungsi kuadrat diketahui titik baliknya $P(p, q)$, maka persamaannya adalah $f(x) = a(x - p)^2 + q$

Untuk lebih jelasnya ikutilah contoh soal berikut ini :

01. Tentukanlah persamaan fungsi kuadrat yang mempunyai titik balik minimum $P(3, -6)$ dan melalui titik $(5, 2)$

Jawab

$$y = a(x - p)^2 + q$$

$$y = a(x - 3)^2 + (-6)$$

$$y = a(x^2 - 6x + 9) - 6$$

Melalui titik $(5, 2)$ maka : $2 = a(5^2 - 6(5) + 9) - 6$

$$2 + 6 = a(25 - 30 + 9)$$

$$8 = a(4) \text{ sehingga } a = 2$$

Jadi $y = 2(x^2 - 6x + 9) - 6$

$$y = 2x^2 - 12x + 12$$

02. Tentukanlah persamaan fungsi kuadrat jika titik potongnya dengan sumbu-X adalah $A(4, 0)$ dan $B(-2, 0)$ serta melalui titik $(2, -8)$

Jawab

$$y = a(x - x_1)(x - x_2)$$

$$y = a(x - 4)(x - (-2))$$

$$y = a(x - 4)(x + 2)$$

$$y = a(x^2 - 2x - 8)$$

Melalui titik $(2, -8)$ maka : $-8 = a((2)^2 - 2(2) - 8)$

$$-8 = a(4 - 4 - 8)$$

$$-8 = a(-8) \text{ sehingga } a = 1$$

Jadi $y = 1(x^2 - 2x - 8)$

$$y = x^2 - 2x - 8$$

03. Tentukanlah nilai m agar fungsi kuadrat $y = mx^2 + (2m + 1)x + (m + 2)$ menyinggung sumbu-X

Jawab

Syarat menyinggung : $D = 0$

$$b^2 - 4ac = 0$$

$$(2m + 1)^2 - 4(m)(m + 2) = 0$$

$$4m^2 + 4m + 1 - 4m^2 - 8m = 0$$

$$-4m + 1 = 0$$

$$m = 1/4$$

04. Diberikan soal "Sebuah perusahaan bus memiliki 8000 penumpang per hari dengan tarif tetap untuk jauh dekat 2000 rupiah. Untuk mengantisipasi kenaikan biaya operasional, perusahaan tersebut mengadakan survey terhadap pelanggan. Hasilnya adalah untuk setiap kenaikan 500 rupiah, pelanggan akan berkurang 800 penumpang per hari. Berapa rupiah kenaikan tarif yang harus diterapkan untuk memaksimalkan pendapatan perusahaan?"

Jawab