

TURUNAN FUNGSI ALJABAR

C. Fungsi Naik dan Fungsi Turun

Misalkan $A = \{x \mid a < x < b\}$ maka berlaku

- (1) Jika $f(x)$ adalah fungsi naik pada interval A maka $f'(x) > 0$, untuk setiap $x \in A$
- (2) Jika $f(x)$ adalah fungsi turun pada interval A maka $f'(x) < 0$, untuk setiap $x \in A$
- (3) Jika $f(x)$ adalah fungsi tidak naik pada interval A maka $f'(x) \leq 0$, untuk setiap $x \in A$
- (4) Jika $f(x)$ adalah fungsi tidak turun pada interval A maka $f'(x) \geq 0$, untuk setiap $x \in A$

Untuk lebih jelasnya, ikutilah contoh soal berikut ini

01. Tentukanlah interval naik dan interval turun dari fungsi $f(x) = 3x^2 - 12x + 5$

Jawab

$$f(x) = 3x^2 - 12x + 5$$

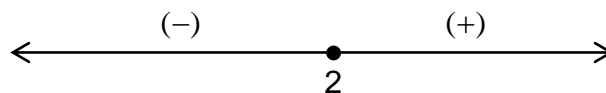
$$f'(x) = 6x - 12$$

$$\text{maka } f'(x) = 0$$

$$6x - 12 = 0$$

$$6x = 12$$

$$x = 2$$



$$\text{Uji } x = 0 \text{ maka } f'(0) = 6(0) - 12 = -12 < 0$$

$$\text{Uji } x = 4 \text{ maka } f'(4) = 6(4) - 12 = 12 > 0$$

sehingga : Interval turun pada $x > 2$

Interval naik pada $x < 2$

02. Tentukanlah interval naik dan interval turun dari fungsi $f(x) = 9 + 2x - 4x^2$

Jawab

$$f(x) = 9 + 2x - 4x^2$$

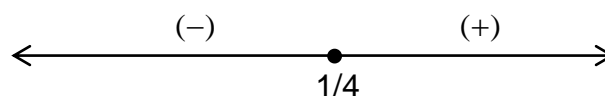
$$f'(x) = 2 - 8x$$

$$\text{maka } f'(x) = 2 - 8x$$

$$2 - 8x = 0$$

$$-8x = -2$$

$$x = 1/4$$



$$\text{Uji } x = 0 \text{ maka } f'(0) = 2 - 8(0) = 2 > 0$$

$$\text{Uji } x = 2 \text{ maka } f'(2) = 2 - 8(2) = -14 < 0$$

sehingga : Interval naik pada $x < 1/4$

Interval turun pada $x > 1/4$

03. Tentukanlah interval naik dan interval turun dari fungsi $f(x) = x^3 + 3x^2 - 45x + 10$

Jawab

$$f(x) = x^3 + 3x^2 - 45x + 10$$

$$f'(x) = 3x^2 + 6x - 45$$

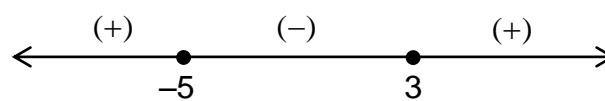
$$\text{maka } f'(x) = 3x^2 + 6x - 45$$

$$3x^2 + 6x - 45 = 0$$

$$x^2 + 2x - 15 = 0$$

$$(x + 5)(x - 3) = 0$$

$$x_1 = -5 \text{ dan } x_2 = 3$$



$$\text{Uji } x = -10 \text{ maka } f'(-10) = 3(-10)^2 + 6(-10) - 45 = 195 > 0$$

$$\text{Uji } x = 0 \text{ maka } f'(0) = 3(0)^2 + 6(0) - 45 = -45 < 0$$

$$\text{Uji } x = 5 \text{ maka } f'(5) = 3(5)^2 + 6(5) - 45 = -14 > 0$$

sehingga : Interval naik pada $x < -5$ atau $x > 3$

Interval turun pada $-5 < x < 3$

04. Tentukanlah interval naik dan interval turun dari fungsi $f(x) = -x^3 + 3x^2 + 24x - 8$

Jawab

$$f(x) = -x^3 + 3x^2 + 24x - 8$$

$$f'(x) = -3x^2 + 6x + 24$$

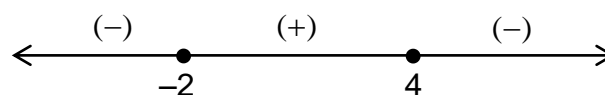
$$\text{maka } f'(x) = -3x^2 + 6x + 24$$

$$-3x^2 + 6x + 24 = 0$$

$$x^2 - 2x - 8 = 0$$

$$(x - 4)(x + 2) = 0$$

$$x_1 = 4 \text{ dan } x_2 = -2$$



$$\text{Uji } x = -3 \text{ maka } f'(-3) = -3(-3)^2 + 6(-3) + 24 = -21 < 0$$

$$\text{Uji } x = 0 \text{ maka } f'(0) = -3(0)^2 + 6(0) + 24 = 24 > 0$$

$$\text{Uji } x = 5 \text{ maka } f'(5) = -3(5)^2 + 6(5) + 24 = -16 < 0$$

sehingga : Interval naik pada $-2 < x < 4$

Interval turun pada $x < -2$ atau $x > 4$

05. Tentukanlah interval naik dan interval turun dari fungsi $f(x) = x^4 - 8x^3 + 18x^2 - 5$

Jawab

$$f(x) = x^4 - 8x^3 + 18x^2 - 5$$

$$f'(x) = 4x^3 - 24x^2 + 36x$$

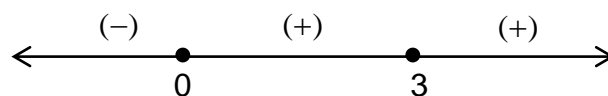
maka $f'(x) = 4x^3 - 24x^2 + 36x$

$$4x^3 - 24x^2 + 36x = 0$$

$$x(x^2 - 6x + 9) = 0$$

$$x(x - 3)(x - 3) = 0$$

$$x_1 = 0 \text{ dan } x_2 = 3$$



Uji $x = -1$ maka $f'(-1) = 4(-1)^3 - 24(-1)^2 + 36(-1) = -64 < 0$

Uji $x = 1$ maka $f'(1) = 4(1)^3 - 24(1)^2 + 36(1) = 16 > 0$

Uji $x = 5$ maka $f'(5) = 4(5)^3 - 24(5)^2 + 36(5) = 80 > 0$

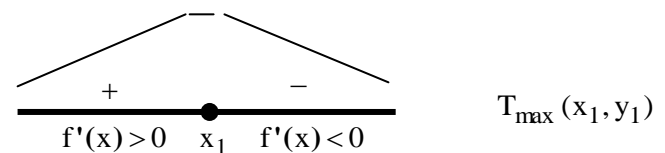
sehingga : Interval naik pada $0 < x < 3$ atau $x > 3$

Interval turun pada $x < 0$

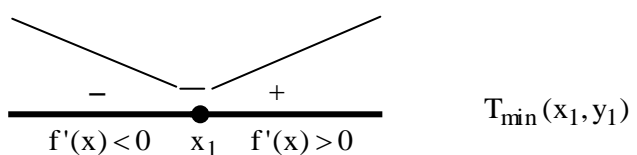
Jika titik $T(x_1, y_1)$ pada kurva $y = f(x)$ dikatakan titik stasioner maka $f'(x) = 0$

Terdapat tiga macam titik stasioner, yaitu :

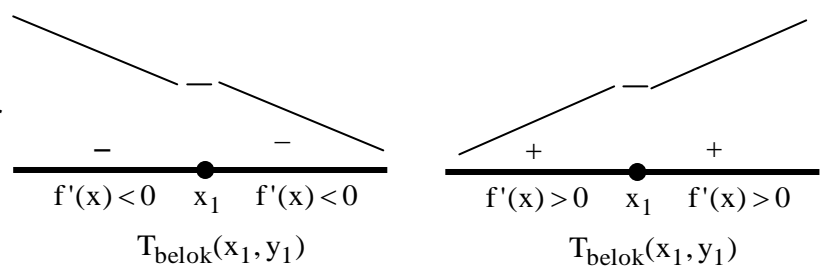
1. Titik balik maksimum
atau titik maksimu mstasioner



2. Titikbalik minimum :
atau titik minimum stasioner



3. Titikbalik horizontal
Atau titik belok stasioner



Untuk lebih jelasnya, ikutilah contoh soal berikut ini :

01. Tentukanlah titik stasioner dan jenisnya untuk fungsi $f(x) = x^2 - 6x + 5$

Jawab

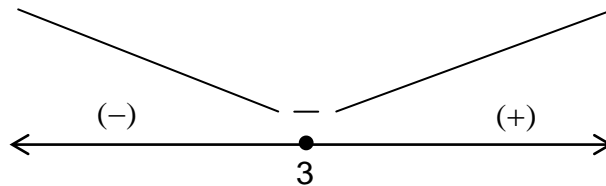
$$f(x) = x^2 - 6x + 5$$

$$f'(x) = 2x - 6$$

$$\text{maka } f'(x) = 2x - 6 = 0$$

$$2x = 6$$

$$\text{Jadi } x = 3 \quad y = (3)^2 - 6(3) + 5 = -4 \quad \text{Titiknya } (3, -4)$$



$$\text{Uji } x = 1 \text{ maka } f'(1) = 2(1) - 6 = -4 < 0$$

$$\text{Uji } x = 4 \text{ maka } f'(4) = 2(4) - 6 = 2 > 0$$

sehingga : Titik $(3, -4)$ adalah titik minimum stasioner

02. Tentukanlah titik stasioner dan jenisnya untuk fungsi $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 10$

Jawab

$$f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 10$$

$$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9$$

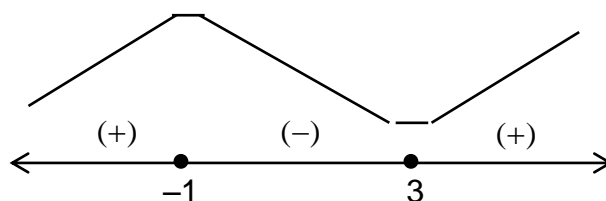
$$\text{maka } f'(x) = 3x^2 - 6x - 9 = 0$$

$$x^2 - 2x - 3 = 0$$

$$(x - 3)(x + 1) = 0$$

$$\text{Jadi } x = 3 \quad y = (3)^3 - 3(3)^2 - 9(3) + 10 = -17 \quad \text{Titiknya } (3, -17)$$

$$x = -1 \quad y = (-1)^3 - 3(-1)^2 - 9(-1) + 10 = 15 \quad \text{Titiknya } (-1, 15)$$



$$\text{Uji } x = -2 \text{ maka } f'(-2) = 3(-2)^2 - 6(-2) - 9 = 15 > 0$$

$$\text{Uji } x = 0 \text{ maka } f'(0) = 3(0)^2 - 6(0) - 9 = -9 < 0$$

$$\text{Uji } x = 4 \text{ maka } f'(4) = 3(4)^2 - 6(4) - 9 = 15 > 0$$

sehingga : Titik $(3, -17)$ adalah titik maksimum stasioner

Titik $(-1, 15)$ adalah titik minimum stasioner

03. Tentukanlah titik stasioner dan jenisnya untuk fungsi $f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x + 6$

Jawab

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x + 6$$

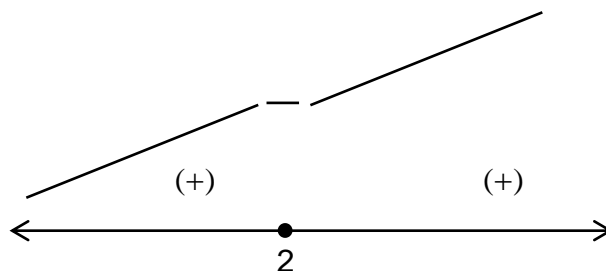
$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 12$$

$$\text{maka } f'(x) = 3x^2 - 12x + 12 = 0$$

$$x^2 - 4x + 4 = 0$$

$$(x - 2)(x - 2) = 0$$

$$\text{Jadi } x = 2 \quad y = (2)^3 - 6(2)^2 + 12(2) + 6 = 14 \quad \text{Titiknya } (2, 14)$$



$$\text{Uji } x = 0 \text{ maka } f'(0) = 3(0)^2 - 12(0) + 12 = 12 > 0$$

$$\text{Uji } x = 4 \text{ maka } f'(4) = 3(4)^2 - 12(4) + 12 = 12 > 0$$

sehingga : Titik $(2, 14)$ adalah titik belok stasioner

04. Tentukanlah titik maksimum dan titik minimum untuk fungsi $f(x) = x^2 - 4x + 6$ dalam interval $-1 \leq x \leq 3$

Jawab

$$f(x) = x^2 - 4x + 6$$

$$f'(x) = 2x - 4$$

$$\text{maka } f'(x) = 0$$

$$2x - 4 = 0$$

$$2x = 4$$

$$x = 2$$

Sehingga

$$x = 2 \text{ maka } f(2) = (2)^2 - 4(2) + 6 = 2 \quad \text{Titiknya } (2, 2)$$

$$x = -1 \text{ maka } f(-1) = (-1)^2 - 4(-1) + 6 = 11 \quad \text{Titiknya } (-1, 11)$$

$$x = 3 \text{ maka } f(3) = (3)^2 - 4(3) + 6 = 3 \quad \text{Titiknya } (3, 3)$$

Jadi : Titik maksimum adalah $(-1, 11)$

Titik minimum adalah $(2, 2)$

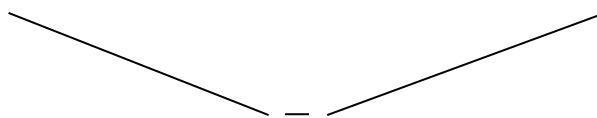
05. Tentukanlah titik maksimum dan titik minimum fungsi $f(x) = x^3 - 9x^2 + 15x - 12$ dalam interval $-2 \leq x \leq 3$

Jawab

$$f(x) = x^3 - 9x^2 + 15x - 12$$

$$f'(x) = 3x^2 - 18x + 15$$

$$\text{maka } f'(x) = 0$$



$$3x^2 - 18x + 15 = 0$$

$$x^2 - 6x + 5 = 0$$

$$(x - 5)(x - 1) = 0$$

$$x_1 = 5 \quad x_2 = 1$$

Sehingga

$$x = 5 \text{ maka } f(5) = (5)^3 - 9(5)^2 + 15(5) - 12 = -37 \quad \text{Titiknya } (5, -37)$$

$$x = 1 \text{ maka } f(1) = (1)^3 - 9(1)^2 + 15(1) - 12 = -5 \quad \text{Titiknya } (1, -5)$$

$$x = -2 \text{ maka } f(-2) = (-2)^3 - 9(-2)^2 + 15(-2) - 12 = -70 \quad \text{Titiknya } (-2, -70)$$

$$x = 3 \text{ maka } f(3) = (3)^3 - 9(3)^2 + 15(3) - 12 = -5 \quad \text{Titiknya } (3, -36)$$

Jadi : Titik maksimum adalah $(1, -5)$

Titik minimum adalah $(-2, -70)$

06. Fungsi kuadrat $f(x) = px^2 + qx + 4$ mempunyai titik balik minimum di $T(1, -1)$.

Tentukanlah nilai p dan q

Jawab

$$f(x) = px^2 + qx + 4$$

$$f'(x) = 2px + q$$

$$\text{maka } f'(x) = 0$$

$$2px + q = 0$$

$$2px = -q$$

$$x = -\frac{q}{2p}$$

$$\text{Sehingga } -\frac{q}{2p} = 1 \text{ maka } q = -2p \dots\dots\dots (1)$$

$$\text{Melalui } (1, -1) \text{ maka } -1 = p(1)^2 + q(1) + 4$$

$$p + q = -5 \dots\dots\dots (2)$$

$$\text{Dari (1) dan (2) } p - 2p = -5$$

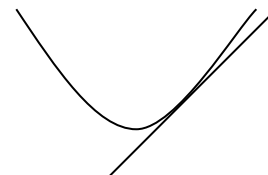
$$-p = -5$$

$$p = 5$$

$$q = 2p = 2(5) = 10$$

Misalkan $A = \{x \mid a < x < b\}$ maka berlaku

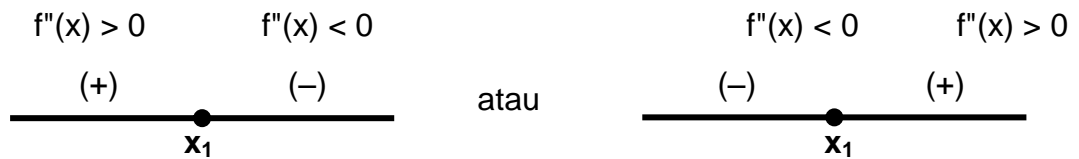
(1) Fungsi f dikatakan cekung ke atas dalam interval A jika $f''(x) > 0$, untuk setiap $x \in A$. Dalam hal ini garis singgung $f(x)$ disetiap titik pada interval A berada dibawah kurva



(2) Fungsi f dikatakan cekung ke bawah dalam interval A jika $f''(x) < 0$, untuk setiap $x \in A$. Dalam hal ini garis singgung $f(x)$ disetiap titik pada interval A berada diatas kurva



Suatu titik $T(x_1, y_1)$ pada kurva $y = f(x)$ dikatakan titik belok kurva jika $f''(x_1) = 0$ atau $f''(x_1)$ tidak ada serta berlaku



Sebagai contoh akan diuraikan pada soal berikut ini :

01. Tentukanlah interval dimana fungsi $f(x) = 2x^3 - 6x^2 + 4x - 5$ cekung atas dan cekung bawah serta tentukan titik beloknya

Jawab

$$f(x) = 2x^3 - 6x^2 + 4x - 5$$

$$f'(x) = 6x^2 - 12x + 4$$

$$f''(x) = 12x - 12$$

Sehingga $f''(x) = 0$

$$12x - 12 = 0$$

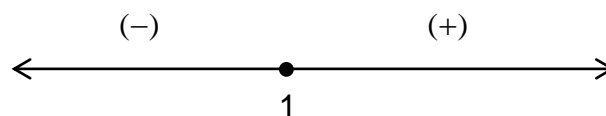
$$12x = 12$$

$$x = 1$$

Uji : $x = 0$ maka $f''(0) = 12(0) - 12 = -12 < 0$ (cekung ke bawah)

Uji : $x = 2$ maka $f''(2) = 12(2) - 12 = 12 > 0$ (cekung ke atas)

atau



Sehingga interval cekung bawah adalah $x < 1$ dan interval cekung atas adalah $x > 1$

$$f(1) = 2(1)^3 - 6(1)^2 + 4(1) - 5 = 2 - 6 + 4 - 5 = -5$$

Titik beloknya $(1, -5)$

02. Tentukanlah interval dimana fungsi $f(x) = x^4 - 2x^3 - 12x^2 + 20$ cekung atas dan cekung bawah serta tentukan titik beloknya

Jawab

$$f(x) = x^4 - 2x^3 - 12x^2 + 20$$

$$f'(x) = 4x^3 - 6x^2 - 24x$$

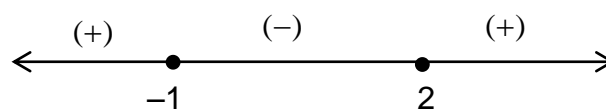
$$f''(x) = 12x^2 - 12x - 24$$

Sehingga $f''(x) = 0$

$$12x^2 - 12x - 24 = 0$$

$$x^2 - x - 2 = 0$$

$$(x - 2)(x + 1) = 0 \text{ maka } x_1 = 2 \text{ dan } x_2 = -1$$



Uji : $x = -2$ maka $f''(-2) = 12(-2)^2 - 12(-2) - 24 = 48 > 0$ (cekung ke atas)
 Uji : $x = 0$ maka $f''(0) = 12(0)^2 - 12(0) - 24 = -24 < 0$ (cekung ke bawah)
 Uji : $x = 3$ maka $f''(3) = 12(3)^2 - 12(3) - 24 = 48 > 0$ (cekung ke atas)
 Sehingga interval cekung bawah $-1 < x < 2$ dan interval cekung atas $x < -1$ atau $x > 2$
 $f(-1) = (-1)^4 - 2(-1)^3 - 12(-1)^2 + 20 = 11$ Titik beloknya $(-1, 11)$
 $f(2) = (2)^4 - 2(2)^3 - 12(2)^2 + 20 = -28$ Titik beloknya $(2, -28)$

03. Diketahui fungsi $f(x) = x^3 - 6x^2 + 4x - 5$. Tentukanlah :

- (a) interval fungsi naik dan turun (b) Koordinat titik stasioner
 (c) Interval cekung atas dan cekung bawah (d) Koordinat titik beloknya

Jawab

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 5$$

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$$

$$f''(x) = 6x - 12$$

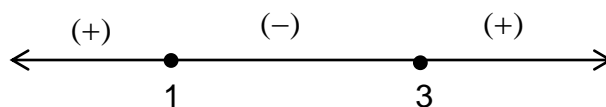
sehingga

(a) $f'(x) = 0$

$$3x^2 - 12x + 9 = 0$$

$$x^2 - 4x + 3 = 0$$

$$(x - 1)(x - 3) = 0 \text{ maka } x_1 = 1 \text{ dan } x_2 = 3$$



Uji : $x = 0$ maka $f'(0) = 3(0)^2 - 12(0) + 9 = 9 > 0$ (fungsi naik)

Uji : $x = 2$ maka $f'(2) = 3(2)^2 - 12(2) + 9 = -3 < 0$ (fungsi turun)

Uji : $x = 4$ maka $f'(4) = 3(4)^2 - 12(4) + 9 = 9 > 0$ (fungsi naik)

Sehingga interval fungsi naik pada $x < 1$ atau $x > 3$

interval fungsi turun pada $1 < x < 3$

(b) Titik stasioner adalah :

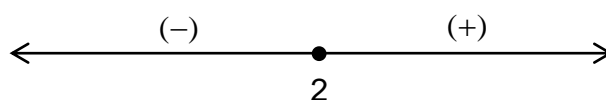
$x = 1$ maka $f(1) = (1)^3 - 6(1)^2 + 9(1) - 5 = -1$, Titik maksimum di $(1, -1)$

$x = 3$ maka $f(3) = (3)^3 - 6(3)^2 + 9(3) - 5 = -5$, Titik minimum di $(3, -5)$

(c) $f''(x) = 0$

$$6x - 12 = 0$$

$$6x = 12 \text{ maka } x = 2$$



Uji : $x = 0$ maka $f''(0) = 6(0) - 12 = -12 < 0$ (cekung bawah)

Uji : $x = 4$ maka $f''(4) = 6(4) - 12 = 12 > 0$ (cekung atas)

Jadi interval cekung bawah $x < 2$ dan interval cekung atas $x > 2$

(d) Koordinat titik beloknya :

$x = 2$ maka $f(2) = (2)^3 - 6(2)^2 + 9(2) - 5 = -3$, Titiknya $(2, -3)$

04. Diketahui fungsi polinom $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx$ mempunyai titik belok $(-2, 6)$ dan gradien garis singgung kurva $y = f(x)$ pada titik belok itu sama dengan -7 .

Tentukanlah fungsi polinom tersebut

Jawab

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx$$

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$

$$f''(x) = 6ax + 2b$$

$$\text{Syarat : } f''(x_1) = 0$$

$$6a(-2) + 2b = 0$$

$$-12a + 2b = 0$$

$$6a - b = 0 \dots\dots\dots (1)$$

$$(-2, 6) \text{ maka } f(-2) = a(-2)^3 + b(-2)^2 + c(-2) = 6$$

$$-8a + 4b - 2c = 6$$

$$4a - 2b + c = -3 \dots\dots\dots (2)$$

$$m = f'(x_1) = 3ax_1^2 + 2bx_1 + c = -7$$

$$3a(-2)^2 + 2b(-2) + c = -7$$

$$12a - 4b + c = -7 \dots\dots\dots (3)$$

$$\text{Dari (2)(3) } 4a - 2b + c = -3$$

$$12a - 4b + c = -7$$

$$\hline -8a + 2b = 4$$

$$4a - b = 2 \dots\dots\dots (4)$$

$$\text{Dari (1)(4) } 6a - b = 0$$

$$4a - b = 2$$

$$\hline 2a = -2 \text{ maka } a = -1$$

$$(4) 4(-1) - b = 2$$

$$-b = -6 \text{ maka } b = 6$$

$$(2) 4(-1) - 2(6) + c = -3$$

$$-4 - 12 + c = -3 \text{ maka } c = 13$$