

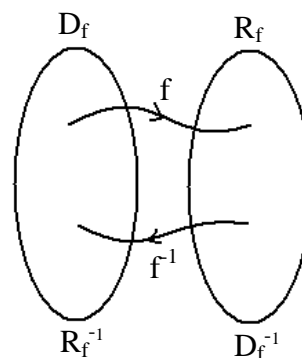
KOMPOSISI FUNGSI DAN FUNGSI INVERS

C. Fungsi Invers

Dalam aturan komposisi fungsi, terdapat fungsi identitas, yakni $I(x) = x$, sehingga berlaku : $f \circ I = I \circ f = f$. Selanjutnya fungsi identitas ini akan berperan banyak dalam menentukan invers suatu fungsi.

Jika f adalah suatu fungsi satu-satu, maka f^{-1} dinamakan fungsi invers dari f jika dan hanya jika $[f^{-1} \circ f](x) = [f \circ f^{-1}](x) = I$, untuk setiap x anggota D_f .

Dengan kata lain invers suatu fungsi f adalah proses membalik fungsi tersebut, sehingga daerah asalnya menjadi daerah hasil dan daerah hasilnya menjadi daerah asal



Untuk lebih jelasnya ikutilah contoh soal berikut ini

01. Tentukanlah invers dari fungsi :

(a) $f(x) = 3x - 5$

(b) $g(x) = \frac{1}{3}x + \frac{3}{4}$

Jawab

(a) $f(x) = 3x - 5$

Misalkan $y = 3x - 5$

Maka $y + 5 = 3x$

$$x = \frac{y+5}{3}$$

Jadi : $f^{-1}(x) = \frac{x+5}{3}$

(b) $g(x) = \frac{1}{3}x + \frac{3}{4}$

Misalkan $y = \frac{1}{3}x + \frac{3}{4}$

Maka $y = \frac{4}{12}x + \frac{9}{12}$

$12y = 4x + 9$

$4x = 12y - 9$

$x = \frac{12y-9}{4}$

Jadi : $f^{-1}(x) = \frac{12x-9}{4}$

02. Tentukanlah invers dari fungsi :

$$(a) f(x) = \frac{2x-3}{x-1}$$

$$(b) g(x) = \frac{2-3x}{2x-4}$$

Jawab

$$(a) f(x) = \frac{2x-3}{x-1}$$

$$\text{Misalkan } y = \frac{2x-3}{x-1}$$

$$\text{Maka } y(x-1) = 2x-3$$

$$xy - y = 2x - 3$$

$$xy - 2x = y - 3$$

$$(y-2)x = y-3$$

$$x = \frac{y-3}{y-2}$$

$$\text{Jadi : } f^{-1}(x) = \frac{x-3}{x-2}$$

$$(b) g(x) = \frac{2-3x}{2x-4}$$

$$\text{Misalkan } y = \frac{2-3x}{2x-4}$$

$$\text{Maka } y(2x-4) = 2-3x$$

$$2xy - 4y = 2 - 3x$$

$$2xy + 3x = 4y + 2$$

$$(2y+3)x = 4y+2$$

$$x = \frac{4y+2}{2y+3}$$

$$\text{Jadi : } g^{-1}(x) = \frac{4x+2}{2x+3}$$

Kita dapat menentukan rumus umum invers fungsi pecahan linier dengan langkah-langkah sebagai berikut :

$$\text{Misalkan } y = \frac{ax+b}{cx+d}$$

Maka :

$$y(cx+d) = ax+b$$

$$cxy+dy = ax+b$$

$$cxy-ax = -dx+b$$

$$(cy-a)x = -dx+b$$

$$x = \frac{-dx+b}{cx-a}$$

$$x = \frac{dx-b}{-cx+a}$$

Jadi Jika $f(x) = \frac{ax + b}{cx + d}$ maka $f^{-1}(x) = \frac{dx - b}{-cx + a}$

03. Tentukanlah invers dari fungsi :

(a) $f(x) = x^2 - 6x + 5$

(b) $f(x) = x^2 + 10x + 8$

(c) $f(x) = 2x^2 - 8x + 4$

Jawab

(a) $f(x) = x^2 - 6x + 5$

Misalkan $y = x^2 - 6x + 5$

Maka $y - 5 = x^2 - 6x$

$$y - 5 + 9 = x^2 - 6x + 9$$

$$y + 4 = (x - 3)^2$$

$$(x - 3) = \pm \sqrt{y + 4}$$

$$x = 3 \pm \sqrt{y + 4}$$

Jadi : $f^{-1}(x) = 3 \pm \sqrt{x + 4}$

(b) $f(x) = x^2 + 10x + 8$

Misalkan $y = x^2 + 10x + 8$

Maka $y - 8 = x^2 + 10x$

$$y - 8 + 25 = x^2 + 10x + 25$$

$$y + 17 = (x + 5)^2$$

$$(x + 5) = \pm \sqrt{y + 17}$$

$$x = -5 \pm \sqrt{y + 17}$$

Jadi : $f^{-1}(x) = -5 \pm \sqrt{x + 17}$

(c) $f(x) = 2x^2 - 8x + 4$

Misalkan $y = 2x^2 - 8x + 4$

Maka $y = 2(x^2 - 4x + 2)$

$$\frac{y}{2} = x^2 - 4x + 2$$

$$\frac{y}{2} - 2 = x^2 - 4x$$

$$\frac{y}{2} - 2 + 4 = x^2 - 4x + 4$$

$$\frac{y}{2} + 2 = (x - 2)^2$$

$$\frac{2y}{4} + \frac{8}{4} = (x - 2)^2$$

$$\frac{2y + 8}{4} = (x - 2)^2$$

$$(x - 2) = \pm \sqrt{\frac{2y + 8}{4}}$$

$$x - 2 = \pm \frac{\sqrt{2y + 8}}{2}$$

$$x = 2 \pm \frac{\sqrt{2y + 8}}{2}$$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{2y + 8}}{2}$$

$$\text{Jadi : } f^{-1}(x) = \frac{4 \pm \sqrt{2x + 8}}{2}$$

Seperti halnya fungsi pecahan linier, maka invers fungsi kuadrat juga dapat ditentukan dengan rumus tertentu, yakni :

Misalkan $y = ax^2 + bx + c$

$$\text{Maka } \frac{y}{a} = x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}$$

$$\frac{y}{a} - \frac{c}{a} = x^2 + \frac{b}{a}x$$

$$\frac{y}{a} - \frac{c}{a} + \left[\frac{b}{2a}\right]^2 = x^2 + \frac{b}{a}x + \left[\frac{b}{2a}\right]^2$$

$$\frac{4ay}{4a^2} - \frac{4ac}{4a^2} + \frac{b^2}{4a^2} = \left[x + \frac{b}{2a}\right]^2$$

$$\frac{b^2 - 4a(c - y)}{4a^2} = \left[x + \frac{b}{2a}\right]^2$$

$$x + \frac{b}{2a} = \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4a(c - y)}{4a^2}}$$

$$x + \frac{b}{2a} = \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4a(c - y)}}{2a}$$

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4a(c - y)}}{2a}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4a(c - y)}}{2a}$$

Jadi : Jika $f(x) = ax^2 + bx + c$ maka $f^{-1}(x) = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4a(c - x)}}{2a}$

04. Tentukanlah invers dari fungsi : $f(x) = [(x+5)^{1/3} - 4]^2$

Jawab

$$\text{Misalkan } y = [(x+5)^{1/3} - 4]^2$$

$$\text{Maka } \sqrt{y} = (x+5)^{1/3} - 4$$

$$\sqrt{y} + 4 = (x+5)^{1/3}$$

$$(\sqrt{y} + 4)^3 = x + 5$$

$$x = (\sqrt{y} + 4)^3 - 5$$

$$\text{Jadi } f^{-1}(x) = (\sqrt{x} + 4)^3 - 5$$

05. Jika $f(x) = x^2 - 7x + 12$, tentukan nilai $f^{-1}(2)$

Jawab

Misalkan $y = x^2 - 7x + 12$, maka mencari nilai $f^{-1}(2)$ dapat dilakukan dengan mensubstitusikan nilai $y = 2$, sehingga :

$$2 = x^2 - 7x + 12$$

$$0 = x^2 - 7x + 10$$

$$0 = (x - 2)(x - 5)$$

$$x_1 = 2 \text{ dan } x_2 = 5$$

$$\text{sehingga : } f^{-1}(2) = 2 \text{ dan } f^{-1}(2) = 5$$

06. Jika $f(x) = \frac{2x+5}{x-1}$ dan $f^{-1}(a) = 2$, tentukanlah nilai a

Jawab

Misalkan $y = \frac{2x+5}{x-1}$, hal ini berarti jika nilai $x = 2$ maka nilai $y = a$, sehingga :

$$a = \frac{2(2)+5}{2-1}$$

$$a = 9$$

Selanjutnya akan diuraikan sifat-sifat komposisi fungsi dalam hubungannya dengan invers fungsi, yakni:

Jika f dan g adalah fungsi satu-satu, maka berlaku :

- (1) Jika $f \circ g = h$ maka $f = h \circ g^{-1}$
- (2) Jika $f \circ g = h$ maka $g = f^{-1} \circ h$
- (3) $[f^{-1}]^{-1} = f$

Bukti sifat (1) : Jika $f \circ g = h$
Maka $f \circ g \circ g^{-1} = h \circ g^{-1}$
 $f \circ I = h \circ g^{-1}$
 $f = h \circ g^{-1}$

Dengan cara yang sama sifat (2) juga dapat kita buktikan. Untuk pemantapan materi lebih jauh, akan diuraikan berberapa contoh soal berikut ini

07. Diketahui fungsi $f(x) = 2x - 5$ dan $h(x) = 6x + 3$. Jika $f \circ g = h$, maka tentukanlah fungsi $g(x)$

Jawab

Misalkan $y = 2x - 5$ maka $x = \frac{y+5}{2}$

Sehingga : $f^{-1}(x) = \frac{x+5}{2}$

Akibatnya $f \circ g = h$
 $g = f^{-1} \circ h$
 $g(x) = f^{-1} [h(x)]$
 $g(x) = f^{-1} [6x + 3]$
 $g(x) = \frac{(6x+3)+5}{2}$
 $g(x) = \frac{6x+8}{2}$
 $g(x) = 3x + 4$

08. Diketahui fungsi $g(x) = 2x + 1$ dan fungsi $h(x) = 4x^2 - 2x + 3$. Jika $f \circ g = h$ maka tentukanlah fungsi $f(x)$

Jawab

Misalkan $y = 2x + 1$ maka $x = \frac{y-1}{2}$

Sehingga : $g^{-1}(x) = \frac{x-1}{2}$

Akibatnya $f \circ g = h$
 $f = h \circ g^{-1}$
 $f(x) = h [g^{-1}(x)]$
 $f(x) = h \left(\frac{x-1}{2} \right)$

$$f(x) = 4\left(\frac{x-1}{2}\right)^2 - 2\left(\frac{x-1}{2}\right) + 3$$

$$f(x) = 4\left(\frac{x^2 - 2x + 1}{4}\right) - 2\left(\frac{x-1}{2}\right) + 3$$

$$g(x) = x^2 - 2x + 1 - x + 1 + 3$$

$$g(x) = x^2 - 3x + 5$$

Selanjutnya dari sifat komposisi di atas dapat dihasilkan sifat baru yakni :

Jika $f \circ g = h$

Maka $f^{-1} \circ f \circ g = f^{-1} \circ h$

$$I \circ g = f^{-1} \circ h$$

$$g = f^{-1} \circ h$$

$$g^{-1} \circ g = g^{-1} \circ f^{-1} \circ h$$

$$I = g^{-1} \circ f^{-1} \circ h$$

$$I \circ h^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1} \circ h \circ h^{-1}$$

$$h^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1} \circ I$$

$$h^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$$

Jadi $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$

Selengkapnya sifat tersebut berbunyi :

Jika f dan g adalah fungsi satu-satu maka berlaku :

(a) $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$

(b) $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$

Untuk pemahaman lebih lanjut, akan diuraikan dalam contoh soal berikut ini :

09. Diketahui $g(x) = 3x + 2$ dan $f(x) = 2x - 5$. Tentukanlah :

(a) $(f \circ g)^{-1}$

(b) $g^{-1} \circ f^{-1}$

Jawab

$$\begin{aligned} \text{(a) } (f \circ g)(x) &= f [g(x)] \\ &= f [3x + 2] \\ &= 2(3x + 2) - 5 \\ &= 6x + 4 - 5 \\ &= 6x - 1 \end{aligned}$$

Misalkan $y = 6x - 1$ maka $x = \frac{y+1}{6}$

Jadi : $(f \circ g)^{-1} = \frac{x+1}{6}$

(b) Jika $g(x) = 3x + 2$ maka $g^{-1}(x) = \frac{x-2}{3}$

Jika $f(x) = 2x - 5$ maka $f^{-1}(x) = \frac{x+5}{2}$

Sehingga : $(g^{-1} \circ f^{-1})(x) = g^{-1} [f^{-1}(x)]$

$$= g^{-1} \left(\frac{x+5}{2} \right)$$

$$= \frac{\left(\frac{x+5}{2} \right) - 2}{3}$$

$$= \frac{\frac{x+5}{2} - \frac{4}{2}}{3}$$

$$= \frac{x+1}{6}$$

10. Diketahui $f(x) = \frac{3x+5}{4x-2}$ dan $g(x) = 2x - 1$. Tentukanlah :

(a) $(g \circ f)^{-1}$

(b) $f^{-1} \circ g^{-1}$

Jawab

(a) $(g \circ f)(x) = g [f(x)]$

$$= g \left(\frac{3x+5}{4x-2} \right)$$

$$= 2 \left(\frac{3x+5}{4x-2} \right) - 1$$

$$= \frac{6x+10}{4x-2} - \frac{4x-2}{4x-2}$$

$$= \frac{(6x+10) - (4x-2)}{4x-2}$$

$$= \frac{6x+10-4x+2}{4x-2}$$

$$= \frac{2x+12}{4x-2}$$

$$= \frac{x+6}{2x-1}$$

Jadi : $(g \circ f)^{-1}(x) = \frac{2x+12}{4x-2}$

(b) Jika $f(x) = \frac{3x+5}{4x-2}$ maka $f^{-1}(x) = \frac{-2x-5}{-4x+3}$

$$f^{-1}(x) = \frac{2x+5}{4x-3}$$

Jika $g(x) = 2x - 1$ maka $g^{-1}(x) = \frac{x+1}{2}$

Sehingga : $(f^{-1} \circ g^{-1})(x) = f^{-1} [g^{-1}(x)]$

$$= f^{-1}\left(\frac{x+1}{2}\right)$$

$$= \frac{2\left(\frac{x+1}{2}\right)+5}{4\left(\frac{x+1}{2}\right)-3}$$

$$= \frac{(x+1)+5}{2(x+1)-3}$$

$$= \frac{(x+1)+5}{2(x+1)-3}$$

$$= \frac{x+6}{2x-1}$$