

STATISTIK INFERENSIAL

A. Fungsi Distribusi Peluang

Suatu besaran yang hanya bisa mengambil nilai-nilai berbeda dinamakan **variabel**. Sedangkan **variabel diskrit** adalah variabel yang diperoleh dari kegiatan membilang sehingga mempunyai nilai-nilai bulat. Jika variabel diskrit tersebut diperoleh dari suatu eksperimen acak, maka dinamakan **variabel diskrit acak**.

Sebagai contoh, pelantunan tiga buah uang logam dimana setiap uang logam berkemungkinan muncul angka (A) atau gambar (G)

Kegiatan ini memiliki ruang sampel $S = \{GGG, GGA, GAG, AGG, GAA, AGA, AAG, GGG\}$, sehingga $n(S) = 8$

Misalkan X adalah variabel yang menunjukkan banyaknya muncul angka

Maka : $X = 0 : \{GGG\}$ $n(X = 0) = 1$ sehingga $P(X = 0) = 1/8$

$X = 1 : \{AGG, GAG, GGA\}$ $n(X = 1) = 3$ sehingga $P(X = 1) = 3/8$

$X = 2 : \{GAA, AGA, AAG\}$ $n(X = 2) = 3$ sehingga $P(X = 2) = 3/8$

$X = 3 : \{AAA\}$ $n(X = 3) = 1$ sehingga $P(X = 3) = 1/8$

Dari data diatas diperoleh tabel distribusi probabilitas

X	0	1	2	3	Lainnya	Total
P(X)	1/8	3/8	3/8	1/8	0	1

Tabel distribusi probabilitas haruslah mempunyai nilai total 1. Artinya jumlah distribusi peluang munculnya angka pada pelantunan tiga buah uang logam haruslah 1.

Dari tabel distribusi probabilitas diatas dapat dibuat fungsi distribusi probabilitas, yakni :

$$F(x) = \begin{cases} 1/8, & \text{jika } x = 0, 3 \\ 3/8, & \text{jika } x = 1, 2 \\ 0, & \text{jika } x = \text{lainnya} \end{cases}$$

Dari uraian diatas disimpulkan bahwa Suatu fungsi $F(X)$ dikatakan fungsi distribusi probabilitas jika memenuhi syarat sebagai berikut :

(1) $X_1, X_2, X_3, \dots, \text{ dan } X_n$ adalah kejadian yang saling lepas

(2) $P(X_1) + P(X_2) + P(X_3) + \dots + P(X_n) = 1$

Untuk lebih jelasnya ikutilah contoh soal berikut ini :

01. Pada pelantunan dua buah dadu serentak satu kali, buatlah tabel dan fungsi distribusi peluang munculnya dua mata mata dadu yang jumlahnya genap.

Jawab

Misalkan X adalah variabel yang menunjukkan jumlah dua mata mata dadu yang menunjukkan angka genap, maka :

Ruang sampel $n(S) = 36$

$X = 2 : \{(1,1)\}$ $n(X = 2) = 1$ sehingga $P(X = 2) = 1/36$
 $X = 4 : \{(1,3),(3,1),(2,2)\}$ $n(X = 4) = 3$ sehingga $P(X = 4) = 1/12$
 $X = 6 : \{(1,5),(5,1),(2,4),(4,2),(3,3)\}$ $n(X = 6) = 5$ sehingga $P(X = 6) = 5/36$
 $X = 8 : \{(6,2),(2,6),(5,3),(3,5),(4,4)\}$ $n(X = 8) = 5$ sehingga $P(X = 8) = 5/36$
 $X = 10 : \{(6,4),(4,6),(5,5)\}$ $n(X = 10) = 3$ sehingga $P(X = 10) = 1/12$
 $X = 12 : \{(6,6)\}$ $n(X = 12) = 1$ sehingga $P(X = 12) = 1/36$

Dari data diatas diperoleh tabel distribusi probabilitas

X	2	4	6	8	10	12	Lainnya	Total
P(X)	1/36	1/12	5/36	5/36	1/12	1/36	1/2	1

Fungsi distribusi probabilitas, yakni :

$$f(x) = \begin{cases} 1/36 & , \text{ jika } x = 2, 12 \\ 1/12 & , \text{ jika } x = 4, 10 \\ 5/36 & , \text{ jika } x = 6, 8 \\ 1/2 & , \text{ jika } x = \text{lainnya} \end{cases}$$

02. Pada pelantunan dua buah dadu serentak satu kali, buatlah tabel dan fungsi distribusi peluang munculnya dua mata mata dadu yang jumlahnya lebih dari 8.

Jawab

Misalkan X adalah variabel yang menunjukkan jumlah dua mata mata dadu yang menunjukkan nilai lebih dari 8, maka :

Ruang sampel $n(S) = 36$

$X = 9 : \{(4,5),(5,4),(6,3),(3,6)\}$ $n(X = 9) = 4$ sehingga $P(X = 9) = 1/9$
 $X = 10 : \{(6,4),(4,6),(5,5)\}$ $n(X = 10) = 3$ sehingga $P(X = 10) = 1/12$
 $X = 11 : \{(6,5),(5,6)\}$ $n(X = 11) = 2$ sehingga $P(X = 11) = 1/18$
 $X = 12 : \{(6,6)\}$ $n(X = 12) = 1$ sehingga $P(X = 12) = 1/36$

Dari data diatas diperoleh tabel distribusi probabilitas

X	9	10	11	12	Lainnya	Total
P(X)	1/9	1/12	1/18	1/36	13/18	1

Fungsi distribusi probabilitas, yakni :

$$F(x) = \begin{cases} 1/9, & \text{jika } x = 9 \\ 1/12, & \text{jika } x = 10 \\ 1/18, & \text{jika } x = 11 \\ 1/36, & \text{jika } x = 12 \\ 13/18, & \text{jika } x = \text{lainnya} \end{cases}$$

Fungsi diatas dapat juga dinyatakan dalam bentuk lain, yakni :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{13-x}{36}, & \text{jika } 9 \leq x \leq 12 \\ 13/18, & \text{jika } x \text{ lainnya} \end{cases}$$

03. Sebuah kotak berisi 4 bola kuning, 2 bola merah dan 4 bola putih. Jika diambil tiga bola sekaligus dari dalam kotak tersebut, buatlah tabel dan fungsi distribusi peluang terambilnya bola putih.

Jawab

Misalkan X adalah variabel yang menunjukkan banyaknya terambil bola putih, maka :

$$\text{Ruang sampel } n(S) = {}_{10}C_3 = \frac{10!}{3!7!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 120$$

$$X = 0 : n(X = 0) = {}_4C_0 \times {}_6C_3 = \left(\frac{4!}{0!4!} \right) \left(\frac{6!}{3!3!} \right) = (1)(20) = 20, \quad P(X) = \frac{1}{6}$$

$$X = 1 : n(X = 1) = {}_4C_1 \times {}_6C_2 = \left(\frac{4!}{1!3!} \right) \left(\frac{6!}{2!4!} \right) = (4)(15) = 60, \quad P(X) = \frac{1}{2}$$

$$X = 2 : n(X = 2) = {}_4C_2 \times {}_6C_1 = \left(\frac{4!}{2!2!} \right) \left(\frac{6!}{1!5!} \right) = (6)(6) = 36, \quad P(X) = \frac{3}{10}$$

$$X = 3 : n(X = 3) = {}_4C_3 \times {}_6C_0 = \left(\frac{4!}{3!1!} \right) \left(\frac{6!}{0!6!} \right) = (4)(1) = 4, \quad P(X) = \frac{1}{30}$$

Dari data diatas diperoleh tabel distribusi probabilitas

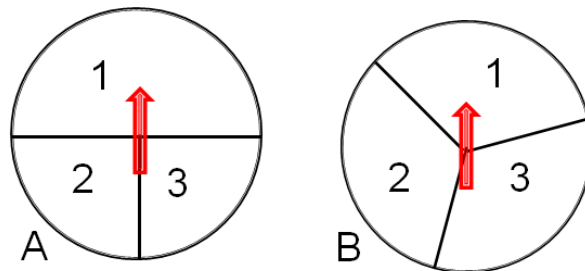
X	0	1	2	3	Lainnya	Total
P(X)	1/6	1/2	3/10	1/30	0	1

Fungsi distribusi probabilitas, yakni :

$$F(x) = \begin{cases} 1/6, & \text{jika } x = 0 \\ 1/2, & \text{jika } x = 1 \\ 3/10, & \text{jika } x = 2 \\ 1/30, & \text{jika } x = 3 \\ 0, & \text{jika } x = \text{lainnya} \end{cases}$$

04. Dua buah papan berbentuk lingkaran dibawah ini diputar satu kali. Misalkan X_1 menyatakan angka yang muncul pada papan A, dan X_2 menyatakan angka yang muncul pada papan B, serta fungsi $Y = X_1 + X_2$.

Buatlah tabel dan fungsi distribusi peluangnya..



Jawab

Dari gambar pada papan diatas diketahui bahwa:

Daerah A1 luasnya setengah dari papan A, sehingga $P(X_1 = 1) = P(A1) = 1/2$

Daerah A2 luasnya seperempat dari papan A, sehingga $P(X_1 = 2) = P(A2) = 1/4$

Daerah A3 luasnya seperempat dari papan A, sehingga $P(X_1 = 3) = P(A3) = 1/4$

Daerah B1 luasnya sepertiga dari papan B, sehingga $P(X_2 = 1) = P(B1) = 1/3$

Daerah B2 luasnya sepertiga dari papan B, sehingga $P(X_2 = 2) = P(B2) = 1/3$

Daerah B3 luasnya sepertiga dari papan B, sehingga $P(X_2 = 3) = P(B3) = 1/3$

Sehingga :

$$P(Y = 2) = P(Y = 1 + 1) = P(A1 \cap B1) = P(A1).P(B1) = (1/2)(1/3) = 1/6$$

$$\begin{aligned} P(Y = 3) &= P(Y=1+2 \text{ atau } Y=2+1) \\ &= P(A1 \cap B2) + P(A2 \cap B1) \\ &= P(A1).P(B2) + P(A2)P(B1) \\ &= (1/2)(1/3) + (1/4)(1/3) \\ &= 1/6 + 1/12 \\ &= 1/4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(Y = 4) &= P(Y=1+3 \text{ atau } Y=3+1 \text{ atau } Y=2+2) \\ &= P(A1 \cap B3) + P(A3 \cap B1) + P(A2 \cap B2) \\ &= P(A1).P(B3) + P(A3)P(B1) + P(A2)P(B2) \\ &= (1/2)(1/3) + (1/4)(1/3) + (1/4)(1/3) \\ &= 1/6 + 1/12 + 1/12 \\ &= 1/3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P(Y = 5) &= P(Y=3+2 \text{ atau } Y=2+3) \\
&= P(A3 \cap B2) + P(A2 \cap B3) \\
&= P(A3).P(B2) + P(A2)P(B3) \\
&= (1/4)(1/3) + (1/4)(1/3) \\
&= 1/12 + 1/12 \\
&= 1/6
\end{aligned}$$

$$P(Y = 6) = P(Y = 3 + 3) = P(A3 \cap B3) = P(A3).P(B3) = (1/4)(1/3) = 1/12$$

Dari data diatas diperoleh tabel distribusi probabilitas

Y	2	3	4	5	6	Lainnya	Total
P(Y)	1/6	1/4	1/3	1/6	1/12	0	1

Fungsi distribusi probabilitas, yakni :

$$F(x) = \begin{cases} \frac{y}{12}, & \text{jika } x = 2, 3, 4 \\ \frac{7-y}{12}, & \text{jika } x = 5, 6 \\ 0, & \text{jika } x = \text{lainnya} \end{cases}$$