STATISTIK INFERENSIAL

A. Distribusi Binomial

Bentuk eksponen binomial adalah bentuk eksponen dengan dua variabel, yakni $(a + b)^n$ Bentuk ini dapat dapat diuraikan dengan konfigurasi Segitiga Pascal, yaitu

$(a + b)^0$ ………………………………………… 1
$(a + b)^1$ …………………………………. 1 1
$(a + b)^2$ ………………………. …. 1 2 1
$(a + b)^3$ …………………..……….1 3 3 1
$(a + b)^4$ ………………….. 1 4 6 4 1
$(a + b)^5$ ………………1 5 10 10 5 1

Sehingga bentuk $(a + b)^3$ dan $(a + b)^4$ misalnya, dapat diuraikan menjadi bentuk polinom segagai berikut:

$$(a + b)^3 = 1.a^3.b^0 + 3.a^{3-1}.b^{0+1} + 3.a^{3-2}.b^{0+2} + 1.a^{3-3}.b^{0+3}$$
$$= a^3 + 3.a^2.b + 3.a.b^2 + b^3$$
$$(a + b)^4 = 1.a^4.b^0 + 4.a^{4-1}.b^{0+1} + 6.a^{4-2}.b^{0+2} + 4.a^{4-3}.b^{0+3} + .a^{4-4}.b^{0+4}$$
$$= a^4 + 4.a^3.b + 6.\,a^2.b^2 + 4.a.b^3 + b^4$$

Dengan aturan kombinasi, uraian polinom bentuk $(a + b)^n$ dapat ditentukan dengan rumus **Binomial Newton**, yaitu :

$$(a + b)^n = \sum_{r=0}^{n} {}_nC_r.a^{n-r}b^r$$

Sehinga bentuk $(a + b)^3$ dan $(a + b)^4$ misalnya, dapat diuraikan menjadi polinom sebagai berikut :

$$(a + b)^3 = {}_3C_0.a^3.b^0 + {}_3C_1..a^{3-1}.b^{0+1} + {}_3C_2.a^{3-2}.b^{0+2} + {}_3C_3.a^{3-3}.b^{0+3}$$
$$= (1).a^3.b^0 + (3).a^{3-1}.b^{0+1} + (3).a^{3-2}.b^{0+2} + (1).a^{3-3}.b^{0+3}$$
$$= a^3 + 3.a^2.b + 3.a.b^2 + b^3$$

$$(a + b)^4 = {}_4C_0.a^4.b^0 + {}_4C_1.a^{4-1}.b^{0+1} + {}_4C_2.a^{4-2}.b^{0+2} + {}_4C_3.a^{4-3}.b^{0+3} + {}_4C_4.a^{4-4}.b^{0+4}$$
$$= (1).a^4.b^0 + (4).a^{4-1}.b^{0+1} + (6).a^{4-2}.b^{0+2} + (4).a^{4-3}.b^{0+3} + (1).a^{4-4}.b^{0+4}$$
$$= a^4 + 4.a^3.b + 6.\,a^2.b^2 + 4.a.b^3 + b^4$$

Untuk lebih jelasnya akan diuraikan dalam contoh soal berikut ini :

01. Tentukanlah suku ke 4 dari uraian polinom bentuk $(p + q)^8$

Jawab

$(p + q)^8$ Maka n = 8

Suku ke 4 maka r = 3

Sehingga suku ke-4 adalah $_8C_3.p^{8-3}q^3 = \frac{8!}{3!.5!}p^5q^3$

$$= \frac{8 \text{ x } 7 \text{ x } 6 \text{ x } 5!}{3 \text{ x } 2 \text{ x } 1.5!}p^5q^3$$

$$= 56\,p^5q^3$$

Eksperimen binomial adalah suatu eksperimen yang memberi hanya dua hasil yang mungkin, yakni “sukses” dan “gagal”. (ditemukan oleh James Bernoulli)

Variabel acak X adalah jumlah hasil sukses untuk n kali percobaan dalam eksperimen binomial

Jika p adalah peluang sukses dan q adalah peluang gagal dalam setiap kali percobaan, maka berlaku :

$$p + q = 1$$

Untuk lebih jelasnya ikutilah contoh soal berikut ini:

02. Pada eksperimen melantunkan Sebuah dadu 4 kali, berapakah banyaknya kejadian 2 kali sukses munculnya mata dadu prima?

Jawab

Misalkan kejadian sukses = S dan kejadian gagal = G, maka untuk 4 kali percobaan diperoleh cacahan : {SSGG, SGSG, SGGS, GSGS, GGSS, GSSG}

Jadi X = 6 kejadian

03. Pada eksperimen melantunkan Sebuah dadu 5 kali, x adalah variabel yang menyatakan banyaknya kejadian sukses munculnya mata dadu 2 atau mata dadu 6 Tentukanakah :

(a) Banyaknya kejadian 3 kali sukses dalam eksperimen itu

(b) Peluang kejadian 3 kali sukses alam eksperimen itu

(c) Peluang kejadian 1 kali sukses alam eksperimen itu

Jawab

(a) $n(x = 3) = {}_5C_3 = \frac{5!}{3!.2!} = \frac{5 \text{ x } 4 \text{ x } 3!}{2 \text{ x } 1.\text{x } 3!} = 10$

(b) Misalkan A = {2, 6} n(A) = 2

S = {1, 2, 3, 4, 5, 6} n(S) = 6

Maka $P(A) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ Sehingga $p = \frac{1}{3}$ dan $q = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

Jadi peluang sukses 3 kali : $P(x=3) = 10\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{80}{243}$

(c) $n(x = 1) = {}_5C_1 = \frac{5!}{1!.4!} = \frac{5 \text{ x } 4!}{1.\text{x } 4!} = 5$

$p = \frac{1}{3}$ dan $q = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$ sehingga $P(x=1) = 5\left(\frac{1}{3}\right)^4\left(\frac{2}{3}\right)^1 = \frac{10}{243}$

Dari uraian diatas dapat disimpulkan bahwa dalam eksperimen binomial dengan peluang sukses sebesar p dan peluang gagal sebesar q = 1 – p untuk setiap percobaan, maka peluang x sukses dari n percobaan ulang dirumuskan :

$$P(X = x) = {}_nC_x \,.\, p^x \,.\, q^{n-x}$$

Bentuk P(X = x) diatas merupakan ***fungsi distribusi binomial***

Untuk lebih jelasnya ikutilah contoh soal berikut ini :

04. Sebuah eksperimen melantunkan dua dadu serentak 5 kali. Jika A adalah kejadian munculnya dua mata dadu yang jumlahnya habis dibagi tiga, maka tentukan peluang sukses 3 kali percobaan dalam eksperimen itu.

Jawab
Diketahui : n = 5
x = 3
maka A = {12, 21, 15, 51, 42, 24, 33, 36, 63, 45, 54, 66} n(A) = 12 dan n(S) = 36.

Peluang sukses adalah $p = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}$

Peluang gagal adalah $q = 1 - p = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

Sehingga peluang sukses 3 kali percobaan dalam eksperimen itu adalah :

$$P(X = 3) = {}_5C_3 \,.\, \left(\frac{1}{3}\right)^3 . \left(\frac{2}{3}\right)^{5-3}$$

$$P(X = 3) = \frac{5!}{3!\,2!} \,.\, \left(\frac{1}{27}\right) . \left(\frac{4}{9}\right)$$

$$P(X = 3) = \frac{40}{243}$$

05. Suatu percobaan melantunkan 4 uang logam secara serentak. Jika percobaan itu diulangi sebanyak 5 kali, maka berapa peluang sukses munculnya tiga “gambar” sebanyak dua kali dalam percobaan itu ?
Jawab
Diketahui : n = 5 dan x = 2

maka A = {GGGA, GGAG, GAGG, AGGG} n(A) = 4 dan n(S) = 2^4 = 16.

Peluang sukses adalah $p = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$

Peluang gagal adalah   q = 1 – p = 1 – $\frac{1}{4}$ = $\frac{3}{4}$

Sehingga peluang sukses 2 kali percobaan dalam eksperimen itu adalah :

P(X = 3) = $_5C_2 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{5-2}$

P(X = 3) = $\frac{5!}{2!\,3!} \cdot \left(\frac{1}{16}\right) \cdot \left(\frac{27}{64}\right)$

P(X = 3) = $\frac{135}{512}$

06. Sebuah tes terdiri dari 10 pertanyaan pilihan ganda dengan 4 pilihan jawaban. Sebagai suatu eksperimen, anda memilih jawaban secara acak tanpa membaca pertanyaannya. Berapa peluang anda menjawab dengan benar 6 nomor ?
Jawab
Diketahui : n = 10 dan x = 6

Peluang sukses menjawab benar satu nomor adalah p = $\frac{1}{4}$

Peluang gagal (menjawab salah satu nomor) adalah q = 1 – p = 1 – $\frac{1}{4}$ = $\frac{3}{4}$

Sehingga peluang sukses menjawab 6 nomor benar dalam eksperimen itu adalah :

P(X = 6) = $_{10}C_6 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^6 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^4$

P(X = 3) = $\frac{10!}{6!\,4!} \cdot \left(\frac{3^4}{4^{10}}\right)$

P(X = 3) = 0,016222

Dalam eksperimen binomial dengan n kali percobaan ulang dimungkinkan untuk mengetahui peluang sukses paling banyak r kali atau paling sedikit r kali, dimana r ≤ n, dengan menggunakan rumus :

$$P(X \le r) = P(X = 1) + P(X = 2) + \ldots + P(X = r)$$

dan

$$P(X \ge r) = P(X = r) + P(X = r+1) + \ldots + P(X = n)$$

Untuk lebih jelasnya ikutilah contoh soal berikut ini :

07. Salah satu tugas layanan pelanggan dari suatu perusahaan telepon adalah kecepatan melayani gangguan dirumah. Menurut data peluang gangguan pada layanan rumah bisa diperbaiki pada hari pengaduan adalah 0,8.
Untuk enam gangguan pertama yang dilaporkan pada suatu hari tertentu, tentukan peluang paling banyak 4 gangguan bisa diperbaiki pada hari yang sama

Jawab

Diketahui : Peluang sukses p = 0,8 dan peluang gagal q = 1 – 0,8 = 0,2
Misalkan X adalah banyak gangguan bisa diperbaiki pada hari terima laporan, maka :

P(X = 0) = ${}_6C_0 \,.\, (0{,}8)^0 \,.\, (0{,}2)^6$ = (1)(1)(0,000064) = 0,000064

P(X = 1) = ${}_6C_1 \,.\, (0{,}8)^1 \,.\, (0{,}2)^5$ = (6)(0,8)(0,00032) = 0,001536

P(X = 2) = ${}_6C_2 \,.\, (0{,}8)^2 \,.\, (0{,}2)^4$ = (15)(0,64)(0,0016) = 0,001536

P(X = 3) = ${}_6C_3 \,.\, (0{,}8)^3 \,.\, (0{,}2)^3$ = (20)(0,512)(0,008) = 0,08192

P(X = 4) = ${}_6C_4 \,.\, (0{,}8)^4 \,.\, (0{,}2)^2$ = (15)(0,4096)(0,04) = 0,24576

Sehingga peluang paling banyak 4 gangguan bisa diperbaiki pada hari terima laporan adalah :
P(X ≤ 4) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4)
P(X ≤ 4) = 0,000064 + 0,001536 + 0,001536 + 0,08192 + 0,24576
P(X ≤ 4) = 0,330816

08. Suatu paket soal ujian dengan 10 nomor soal pilihan ganda dimana setiap soal mengandung 5 obtion pilihan jawaban.
Misalkan seorang siswa memilih jawaban secara acak untuk setiap soal, maka berapakah peluang siswa tersebut akan gagal dalam ujian ?
(Anggap siswa tidak lulus jika jawaban benarnya paling banyak 5)

Jawab

Diketahui : Peluang sukses p = 1/5 = 0,2 dan peluang gagal q = 1 – 0,2 = 0,8
Misalkan X adalah banyak jawaban benar yang diperoleh siswa, maka :

P(X = 0) = ${}_{10}C_0 \,.\, (0{,}2)^0 \,.\, (0{,}8)^{10}$ = (1)(1)(0.10737) = 0.10737

P(X = 1) = ${}_{10}C_1 \,.\, (0{,}2)^1 \,.\, (0{,}8)^9$ = (10)(0,2)(0,13422) = 0.268435456

P(X = 2) = ${}_{10}C_2 \,.\, (0{,}2)^2 \,.\, (0{,}8)^8$ = (45)(0,04)(0,16777) = 0.301989888

P(X = 3) = ${}_{10}C_3 \,.\, (0{,}2)^3 \,.\, (0{,}8)^7$ = (120)(0,008)(0,210) = 0.201326592

P(X = 4) = ${}_{10}C_4 \,.\, (0{,}2)^4 \,.\, (0{,}8)^6$ = (210)(0,0016)(0,262) = 0.088080384

P(X = 5) = ${}_{10}C_5 \,.\, (0{,}2)^5 \,.\, (0{,}8)^5$ = (252)(0,0003)(0,328) = 0.0264241152

Sehingga peluang siswa tersebut akan gagal dalam ujian adalah :

$P(X \le 5) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5)$

$P(X \le 5) = 0.10737 + 0.268435456 + 0.301989888 + 0.201326592 + 0.088080384 + 0.0264241152$

$P(X \le 5) = 0.993630617600001$

09. Suatu pasangan pengantin baru bermaksud memiliki enam anak. Jika keinginan mereka tewujud, maka tentukan peluang lebih banyak anak lelaki daripada anak perempuan yang mereka miliki

Jawab

Diketahui : Peluang sukses p = 1/2 dan peluang gagal q = 1 – (1/2) = 1/2

Misalkan X adalah banyaknya anak lelaki yang mereka miliki, maka :

$P(X = 4) = {}_6C_4 \,.\, (1/2)^4 \,.\, (1/2)^2 = (15)(1/2)^6$

$P(X = 1) = {}_6C_5 \,.\, (1/2)^5 \,.\, (1/2)^1 = (6)(1/2)^6$

$P(X = 2) = {}_6C_6 \,.\, (1/2)^6 \,.\, (1/2)^0 = (1)(1/2)^6$

Sehingga peluang mereka memiliki lebih banyak anak lelaki adalah :

Jadi $P(X \ge 4) = (15 + 6 + 1)\ (1/2)^6$

$P(X \ge 4) = 11/32$