

BARISAN DAN DERET

B. Barisan dan Deret Geometri

Jika $U_1, U_2, U_3, U_4, \dots, U_n$ adalah suku-suku dari suatu barisan, dimana nilai perbandingan $\frac{U_2}{U_1} = \frac{U_3}{U_2} = \frac{U_4}{U_3} = \dots = \frac{U_n}{U_{n-1}} = \text{rasio}$, merupakan angka yang tetap,

Sehingga :

- (1) 2, 4, 8, 16, 32, 64, ... adalah barisan geometri dengan rasio 2
- (2) 96, 48, 24, 12, 6, ... adalah barisan geometri dengan rasio 1/2
- (3) 1 + 5 + 25 + 125 + 625 + ... adalah deret geometri dengan rasio 5
- (4) 1 - 3 + 9 - 27 + 81 - 243 + ... adalah deret geometri dengan rasio -3

Jika suku pertama suatu barisan geometri dinamakan a , dan rasionya r , maka

diperoleh: $U_1 = a$

$$U_2 = ar$$

$$U_3 = ar^2$$

$$U_4 = ar^3 \dots \dots \dots U_n = ar^{n-1}$$

Jadi suku ke- n barisan aritmatika dirumuskan : $U_n ar^{n-1} \dots \dots \dots (1)$

Jika suatu barisan geometri mempunyai suku pertama a dan ratio r , maka Jumlah sampai n suku pertama (S_n) dapat dirumuskan :

$$S_n = a + ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 + \dots + ar^{n-1}$$

$$S_n = (a + ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 + \dots + ar^{n-1}) \left(\frac{r-1}{r-1} \right), \quad r \neq 1$$

$$S_n = \frac{(a + ar + ar^2 + ar^3 + \dots + ar^{n-1})(r-1)}{r-1}, \quad r \neq 1$$

$$S_n = \frac{(ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 + \dots + ar^{n-1} + ar^n) - (a + ar + ar^2 + ar^3 + \dots + ar^{n-1})}{r-1}, \quad r \neq 1$$

$$S_n = \frac{ar^n - a}{r-1}, \quad r \neq 1$$

$$S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r-1}, \quad r \neq 1 \dots \dots \dots (2)$$

Jika $r = 1$ maka berlaku :

$$S_n = a + a + a + a + a + a + a + \dots + a \quad (a \text{ sebanyak } n \text{ suku})$$

$$S_n = an \dots \dots \dots (3)$$

Jika banyaknya suku-suku pada barisan geometri berjumlah ganjil (n ganjil), maka suku tengah adalah suku ke $n = \frac{1}{2}(n + 1)$. Sehingga rumus suku tengah dapat ditentukan sebagai berikut

$$U_n = ar^{n-1}$$

$$U_T = ar^{\frac{n+1}{2}-1}$$

$$U_T = ar^{\frac{1}{2}(n-1)}$$

$$U_T = \left[a^2 r^{n-1} \right]^{1/2}$$

$$U_T = \left[a \cdot ar^{n-1} \right]^{1/2}$$

$$U_T = \left[a \cdot U_n \right]^{1/2}$$

$$U_T = \sqrt{a \cdot U_n}, \text{ dimana } n \text{ ganjil} \dots\dots\dots (4)$$

$$\text{Atau } U_T = \sqrt{a \cdot ar^{n-1}}$$

$$U_T = a\sqrt{r^{n-1}}, \text{ dimana } n \text{ ganjil} \dots\dots\dots (5)$$

Selanjutnya kita juga dapat merumuskan hubungan antara U_n dan S_n , yakni :

$$S_n = U_1 + U_2 + U_3 + U_4 + U_5 + U_6 + \dots + U_{n-1} + U_n$$

$$S_n = \underbrace{U_1 + U_2 + U_3 + U_4 + U_5 + U_6 + \dots + U_{n-1}}_{S_{n-1}} + U_n$$

$$U_n = S_n - S_{n-1} \dots\dots\dots (5)$$

Untuk lebih memantapkan pemahaman konsep di atas ikutilah contoh soal berikut ini:

01. Tentukanlah suku ke 12 dari barisan 32, 16, 8, 4,

Jawab

$$a = 32, \quad r = \frac{16}{32} = \frac{1}{2}$$

$$\text{Maka : } U_{12} = ar^{12-1} = 32 \cdot \left[\frac{1}{2} \right]^{11} = 2^5 \cdot [2^{-1}]^{11} = 2^5 \cdot 2^{-11} = 2^{-6} = \frac{1}{64}$$

02. Tentukanlah hasil dari $2 + 4 + 8 + \dots + 128$

Jawab

$$a = 2, \quad r = \frac{4}{2} = 2$$

$$\text{Maka : } U_n = ar^{n-1}$$

$$128 = 2(2^{n-1})$$

$$64 = 2^{n-1}$$

$$2^6 = 2^{n-1} \quad \text{Maka } n - 1 = 6 \quad n = 7$$

$$\begin{aligned} \text{Sehingga : } S_7 &= \frac{a(r^7 - 1)}{r - 1} \\ S_7 &= \frac{2(2^7 - 1)}{2 - 1} \\ S_7 &= 2(128 - 1) \\ S_7 &= 2(127) \\ S_7 &= 254 \end{aligned}$$

03. Suatu barisan geometri diketahui suku ke tiga adalah 12 dan suku ke enam adalah 96. Tentukanlah jumlah empat suku pertamanya

Jawab

$$U_3 = 12 \text{ maka } ar^{3-1} = 12 \quad \text{atau} \quad ar^2 = 12 \dots\dots\dots (1)$$

$$U_6 = 96 \text{ maka } ar^{6-1} = 96 \quad \text{atau} \quad ar^5 = 96 \dots\dots\dots (1)$$

$$\text{Sehingga : } \frac{ar^5}{ar^2} = \frac{96}{12}$$

$$r^3 = 8 \text{ maka } r = 2$$

Dari (1) diperoleh $a \cdot 2^2 = 12$ maka $a = 3$

$$\text{jadi : } S_4 = \frac{a(r^4 - 1)}{r - 1} = \frac{3(2^4 - 1)}{2 - 1} = 3(16 - 1) = 45$$

04. Tiga bilangan membentuk barisan geometri. Jika jumlah ketiga bilangan itu 35 dan hasil kalinya 1000, maka tentukanlah ketiga bilangan itu !

Jawab

Misalkan ketiga bilangan itu $\frac{a}{r}$, a dan ar

$$\text{Maka } \frac{a}{r} \cdot a \cdot ar = 1000 \text{ atau } a^3 = 1000 \text{ Jadi } a = 10$$

$$\frac{a}{r} + a + ar = 35$$

$$\frac{10}{r} + 10 + 10r = 35$$

$$10 + 10r + 10r^2 = 35r$$

$$10r^2 - 25r + 10 = 0$$

$$2r^2 - 5r + 2 = 0$$

$$(2r - 1)(r - 2) = 0$$

Jadi $r = 1/2$ atau $r = 2$

Sehingga ketiga bilangan itu adalah $\frac{10}{1/2}$, 10 , $10(1/2) \longrightarrow 20$, 10 dan 5

atau $\frac{10}{2}$, 10 , $10(2) \longrightarrow 5$, 10 dan 20

05. Jika barisan $3, 3\sqrt{2}, 6, 6\sqrt{2}, \dots$ diteruskan sampai 13 suku, maka suku tengahnya adalah

Jawab

$$a = 3, \quad r = \frac{3\sqrt{2}}{3} = \sqrt{2}$$

$$\text{Maka : } U_{13} = ar^{13-1} = 3 \cdot (\sqrt{2})^{12} = 3 \cdot 2^6 = 3(64)$$

$$\text{Sehingga : } U_T = \sqrt{a \cdot U_{13}} = \sqrt{3 \cdot 3(64)} = \sqrt{9(64)} = 3 \cdot 8 = 24$$

06. Diketahui rumus jumlah n suku pertama deret geometri adalah $S_n = 2^{n-3} + 4$. Tentukanlah nilai $U_5 + U_6$!

Jawab

$$\begin{aligned} U_5 + U_6 &= S_6 - S_4 \\ &= [2^{6-3} + 4] - [2^{4-3} + 4] \\ &= 2^3 + 4 - 2^1 - 4 \\ &= 8 + 4 - 2 - 4 \\ &= 6 \end{aligned}$$

07. Suatu jenis amuba setiap satu detik akan membelah menjadi 2. Jika pada permulaan terdapat 5 amuba, maka tentukanlah banyaknya amuba setelah 7 detik

Jawab

$$\left. \begin{array}{l} a = 5 \\ r = 2 \\ n = 7 \end{array} \right\} U_7 = \dots??$$

$$\text{maka } U_7 = ar^{7-1}$$

$$U_7 = 5 \cdot 2^6$$

$$U_7 = 5(64)$$

$$U_7 = 320 \text{ amuba}$$

07. Suatu zat radioaktif akan menyusut menjadi setengahnya dalam 1 jam. Jika pada pukul 09.00 massa zat tersebut seberat 32 kg, maka berapa gram sisa zat radioaktif tersebut pada pukul 17.00 ?

Jawab

$$\text{Diketahui : } n = 17 - 9 = 8$$

$$a = 32 \text{ kg} = 32000 \text{ gr}$$

$$r = 1/2$$

$$\text{Ditanya : } U_8$$

$$\text{Jawab : } U_7 = ar^{8-1}$$

$$U_7 = 32 \cdot (1/2)^7$$

$$U_7 = 1/4 \text{ satuan}$$