

# BARISAN DAN DERET

## B. Barisan dan Deret Aritmatika

Barisan adalah kumpulan objek-objek yang disusun menurut pola tertentu. Objek pertama dinamakan suku pertama, objek kedua dinamakan suku kedua, objek ketiga dinamakan suku ketiga dan seterusnya sampai objek ke-n dinamakan suku ke-n atau  $U_n$ . Jika objek-objek tersebut berupa bilangan, maka bentuk penjumlahan dari objek-objek tersebut sampai n suku dinamakan deret.

Barisan aritmatika adalah suatu barisan angka-angka dimana  $U_2 - U_1 = U_3 - U_2 = U_4 - U_3 = \dots = U_n - U_{n-1} = \text{beda}$  (merupakan angka yang tetap)

Sehingga :

(1) 3, 7, 11, 15, 19, 23, 27, 31, 35 adalah barisan aritmatika dengan beda 4

(2) 63, 58, 53, 48, ..., 3 adalah barisan aritmatika dengan beda -5

(3)  $5 + 8 + 11 + 14 + 17 + \dots + 50$  adalah deret aritmatika dengan beda 3

(4)  $3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + \dots$  adalah deret aritmatika tak hingga dengan beda 2

Jika suku pertama suatu barisan aritmatika dinamakan a, maka diperoleh:

$$U_1 = a$$

$$U_2 = U_1 + b = a + b$$

$$U_3 = U_2 + b = (a + b) + b = a + 2b$$

$$U_4 = U_3 + b = (a + 2b) + b = a + 3b$$

$$U_5 = U_4 + b = (a + 3b) + b = a + 4b$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \quad \quad \cdot \quad \cdot$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \quad \quad \cdot \quad \cdot$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \quad \quad \cdot \quad \cdot$$

$$U_n = \dots \dots \dots = a + (n - 1)b$$

Jadi suku ke-n barisan aritmatika dirumuskan :  $U_n = a + (n - 1)b$  ..... (1)

Sebagai contoh diketahui barisan : 3, 7, 11, 15, 19, 23, ...

Maka suku ke-21 dapat ditentukan dengan rumus :

$$U_{21} = a + (21 - 1)b = a + (20)b = 3 + (20)4 = 83$$

Untuk menentukan rumus jumlah sampai suku ke-n, dapat ditentukan dengan cara :

$$S_n = a + a + b + a + 2b + a + 3b + \dots + U_n$$

$$S_n = U_n + U_{n-1} + U_{n-2} + U_{n-3} + \dots + a$$

$$S_n = a + a + b + a + 2b + a + 3b + \dots + U_n$$

$$S_n = U_n + U_n - b + U_n - 2b + U_n - 3b + \dots + a$$

$$2S_n = a + U_n + a + U_n + a + U_n + a + U_n + \dots + a + U_n +$$

$$2S_n = n(a + U_n)$$

$$S_n = \frac{1}{2} n(a + U_n) \dots\dots\dots (2)$$

$$S_n = \frac{1}{2} n(a + a + (n - 1)b)$$

$$S_n = \frac{1}{2} n[2a + (n - 1)b] \dots\dots\dots (3)$$

Sebagai contoh diketahui deret : 3 + 7 + 11 + 15 + 19 + 23 + ... Jumlah 10 suku pertamanya dapat ditentukan dengan rumus :

$$S_n = \frac{1}{2} n[2a + (n - 1)b]$$

$$S_n = \frac{1}{2} (10) [2(3) + (10 - 1)4] = 5 [6 + 36] = 5 [42] = 210$$

Jika suatu barisan aritmatika diketahui n ganjil, maka suku tengah dapat ditentukan dengan rumus sebagai berikut :

$$U_T = U_{(n+1)/2}$$

$$= a + \left[ \frac{1}{2}(n+1) - 1 \right] b$$

$$= \frac{2a}{2} + \left( \frac{(n+1)-2}{2} \right) b$$

$$= \frac{2a + (n - 1)b}{2}$$

$$= \frac{1}{2} [a + a + (n - 1)b]$$

$$U_T = \frac{1}{2} [a + U_n] \dots\dots\dots (4)$$

Sebagai contoh diketahui barisan : 3, 7, 11, 15, 19, 23, ...

Jika barisan tersebut diteruskan sampai 15 suku, maka suku tengahnya dapat ditentukan

dengan rumus :  $U_T = \frac{1}{2} [a + U_{15}] = \frac{1}{2} [3 + (3 + (15 - 1)4)] = \frac{1}{2} [6 + 56] = 31$

Selanjutnya kita juga dapat merumuskan hubungan antara  $U_n$  dan  $S_n$  , yakni :

$$S_n = U_1 + U_2 + U_3 + U_4 + U_5 + U_6 + \dots + U_{n-1} + U_n$$

$$S_n = \underbrace{U_1 + U_2 + U_3 + U_4 + U_5 + U_6 + \dots + U_{n-1}}_{S_{n-1}} + U_n$$

$$U_n = S_n - S_{n-1} \dots\dots\dots (5)$$

Untuk lebih memantapkan pemahaman konsep di atas ikutilah contoh soal berikut ini:



$$S_{13} = \frac{1}{2} (13) [ 8 + 36 ]$$

$$S_{13} = \frac{1}{2} (13) [ 44 ]$$

$$S_{13} = 286$$

5. Hitunglah hasil dari  $2 + 5 + 8 + 11 + \dots + 29$

Jawab

Diketahui  $2 + 5 + 8 + 11 + \dots + 29$

Maka  $a = 2$

$$b = 3$$

$$U_n = 29$$

Sehingga :  $U_n = a + (n - 1)b$

$$29 = 2 + (n - 1)3$$

$$27 = (n - 1)3$$

$$9 = n - 1$$

$$n = 10$$

$$\text{Jadi } S_n = \frac{1}{2} n [ 2a + (n - 1)b ]$$

$$S_{10} = \frac{1}{2} (10) [ 2(2) + (10 - 1)3 ]$$

$$S_{10} = 5[ 4 + 27 ]$$

$$S_{10} = 155$$

6. Jika diketahui  $3 + 5 + 7 + 9 + \dots + x = 99$  maka tentukanlah nilai  $x$

Jawab

Diketahui  $3 + 5 + 7 + 9 + \dots + x = 99$

Maka :  $a = 3$

$$b = 5 - 3 = 2$$

$$S_n = 99$$

$$\text{Sehingga } S_n = \frac{1}{2} n [ 2a + (n - 1)b ]$$

$$99 = \frac{1}{2} n [ 2(3) + (n - 1)2 ]$$

$$198 = n [ 6 + 2n - 2 ]$$

$$198 = n [ 4 + 2n ]$$

$$198 = 4n + 2n^2$$

$$2n^2 + 4n - 198 = 0$$

$$n^2 + 2n - 99 = 0$$

$$(n - 9)(n + 11) = 0$$

$$n = 9$$

$$\begin{aligned} \text{Jadi } x &= U_9 \\ x &= a + (9 - 1)b \\ x &= 3 + (8)2 \\ x &= 19 \end{aligned}$$

7. Diketahui deret aritmatika  $10 + 14 + 18 + \dots$ . Jika deret tersebut diteruskan sampai 9 suku, maka suku tengahnya adalah....

Jawab

$$\begin{aligned} \text{Diketahui } a &= 10 \\ b &= 14 - 10 = 4 \\ n &= 9 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Maka } U_9 &= a + (9 - 1)b \\ U_9 &= 10 + (8)4 \\ U_9 &= 42 \end{aligned}$$

$$\text{Jadi } U_T = \frac{1}{2}(a + U_n) = \frac{1}{2}(10 + 42) = 26$$

8. Jika jumlah  $n$  suku pertama suatu deret aritmatika ditentukan dengan rumus  $S_n = 2n^2 + 4n$ , maka tentukanlah suku ke 5

Jawab

$$\begin{aligned} S_n &= 2n^2 + 4n \\ \text{Maka } S_5 &= 2(5)^2 + 4(5) = 50 + 20 = 70 \\ S_4 &= 2(4)^2 + 4(4) = 32 + 16 = 48 \end{aligned}$$

$$\text{Jadi } U_5 = S_5 - S_4 = 70 - 48 = 22$$

9. Diantara angka 2 dan angka 14 disisipkan tiga angka, sehingga kelima angka tersebut membentuk barisan aritmatika. Tentukanlah ketiga angka yang disisipkan tersebut

Jawab

Misalkan kelima angka tersebut adalah:  $2, 2 + b, 2 + 2b, 2 + 3b, 14$

$$\begin{aligned} \text{Maka : } U_5 &= a + (n - 1)b \\ 14 &= 2 + (5 - 1)b \\ 14 - 2 &= 4b \\ 4b &= 12 \\ b &= 3 \end{aligned}$$

Jadi ketiga angka tersebut adalah :  $2 + 3, 2 + 2(3), 2 + 3(3) = 5, 8, 11$

10. Amir mempunyai hutang Rp. 600.000 yang pembayarannya diangsur setiap bulan sebesar Rp. 40.000. Selama berapa bulankah ia harus mengangsur hingga hutangnya lunas ?

Jawab

$$\left. \begin{aligned} a &= 40000 \\ b &= 40000 \\ U_n &= 600.000 \end{aligned} \right\} n = \dots\dots ?$$

Sehingga

$$U_n = a + (n - 1)b$$

$$600.000 = 40000 + (n - 1)40000$$

$$600.000 = 40000 + 40000n - 40000$$

$$600.000 = 40000n$$

$$n = \frac{600000}{40000}$$

$$n = 15$$

Jadi ia harus mengangsur selama 15 bulan sampai hutangnya lunas

11. Sebuah kendaraan bermotor akan diuji ketahanan mesinnya dengan cara dikendarai melewati berbagai kota selama delapan hari berturut-turut. Pada hari pertama, kendaraan tersebut berhasil menempuh jarak 15 km, pada hari kedua 25 km, hari ketiga 35 km dan seterusnya membentuk pola aritmatika. Berapakah total jarak yang berhasil ditempuh kendaraan tersebut selama 8 hari ?

Jawab

Barisan yang didapat adalah barisan aritmatika : 15, 25, 35, ...,  $U_n$ , sehingga

$$a = 15$$

$$b = 25 - 15 = 10 \quad \left. \vphantom{b = 25 - 15 = 10} \right\} n = \dots\dots ?$$

$$n = 8$$

Jadi total jarak yang berhasil ditempuh kendaraan tersebut adalah

$$S_n = \frac{1}{2}n [ 2a + (n - 1)b ]$$

$$S_n = \frac{1}{2}(8) [ 2(15) + (8 - 1)10 ]$$

$$S_n = 4 [ 30 + 70 ]$$

$$S_n = 400 \text{ km}$$

12. Pada zaman dahulu hiduplah seorang kakek dengan 9 orang anaknya. Jika anak tertua berumur 37 tahun dan umur kesembilan anak tersebut berselisih 3 tahun, maka berapakah umur anak yang tengah ?

Jawab

Barisan yang didapat adalah barisan aritmatika, dimana

$$n = 9$$

$$U_9 = 37 \quad \left. \vphantom{U_9 = 37} \right\} n = \dots\dots ?$$

$$b = 3$$

Sehingga :  $U_n = a + (n - 1)b$

$$U_9 = a + (9 - 1)3$$

$$37 = a + 24$$

$$a = 13$$

Jadi umur anak yang tengah adalah

$$U_T = \frac{1}{2} [ a + U_9 ]$$

$$U_T = \frac{1}{2} [ 13 + 37 ]$$

$$U_T = 30$$

13. Andi selalu menabung di bank secara rutin setiap awal bulan sebesar Rp. 200.000,-. Jika pada pertengahan Januari 2012, Andi telah mempunyai uang Rp. 600.000 di bank tersebut, maka berapakah banyaknya uang Andi pada pertengahan bulan Desember ?

Jawab

Diketahui :  $a = 600.000$

$$b = 200.000$$

$$n = 11 \text{ (Dari Februari 2012 sampai Desember 2012 )}$$

$$\text{Maka } U_{11} = a + (11 - 1)b = 600000 + (10)200000 = 2.600.000$$

Jadi banyaknya uang Andi pada pertengahan bulan Desember adalah Rp. 2.600.000

14. Suatu bioskop memiliki 10 deretan bangku. Pada deretan pertama ada 20 bangku. Pada deretan kedua ada 24 bangku. Pada deretan ketiga ada 28 bangku, dan seterusnya. Berapa banyak bangku dalam bioskop tersebut ?

Jawab

Diketahui :  $n = 10$

$$a = 20$$

$$b = 4$$

Ditanya :  $S_{10}$

$$\text{Jawab : } S_n = \frac{n}{2} (2a + (n - 1)b)$$

$$S_{10} = \frac{10}{2} (2[20] + (10 - 1)4)$$

$$S_n = 5 (40 + 36)$$

$$S_n = 5 (76)$$

$$S_n = 385 \text{ bangku}$$