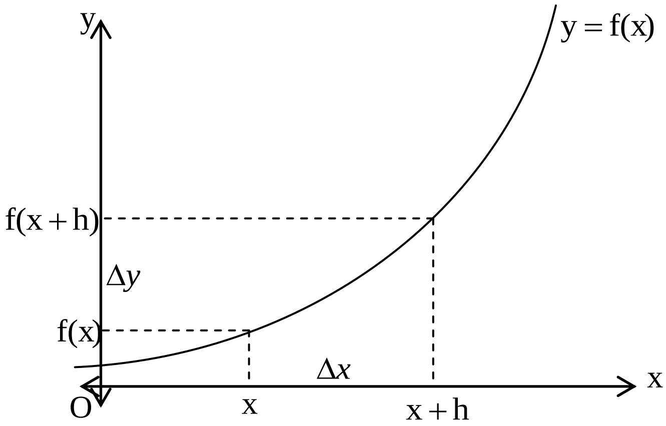
TURUNAN FUNGSI ALJABAR

A. Aturan Dasar Turunan Fungsi Aljabar

Turunan dari fungsi kontinu y = f(x) merupakan laju perubahan nilai y terhadap nilai x.

Atau $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ atau $\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$

Jika perubahan nilai x tersebut sebesar h, maka kita dapat menuliskan : $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ sebagai hasil dari perubahan tersebut (seperti gambar).
Jika nilai h diambil kecil mendekati nol (limit h mendekati nol), maka perubahan tersebut akan menjadi laju perubahan. Inilah yang menjadi dasar dari konsep turunan



Sehingga turunan dari fungsi f(x) dilambangkan dengan f '(x) didefinisikan sebaagai

f '(x) = $\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

Seorang matematikawan Jerman bernama Gottfried Leibniz (1646 – 1716) menuliskan notasi untuk turunan tersebut dengan simbol $\frac{dy}{dx}$. Simbol ini mengambil dasar pada perubahan Δx menjadi dx dan Δy menjadi dy, mengingat perubahan nilai x tersebut diambil kecil mendekati nol.

Jadi notasi turunan dari fungsi y = f(x) dapat ditulis sebagai

$$y' \text{ atau } f'(x) \text{ atau } \frac{dy}{dx} \text{ atau } \frac{df}{dx}$$

Untuk lebih jelasnya ikutilah contoh soal berikut ini :

01. Dengan menggunakan definisi turunan, tentukanlah turunan dari setiap fungsi berikut ini :
    (a) f(x) = 3x – 5
    (b) f(x) = $4x^2 + 3x$
    (c) f(x) = $x^3 - 2x$
    Jawab

(a) $f(x) = 3x - 5$

Maka $f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{[3(x+h) - 5] - [3x - 5]}{h}$

$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{3x + 3h - 5 - 3x + 5}{h}$

$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{3h}{h}$

$f'(x) = 3$

(b) $f(x) = 4x^2 + 3x$

Maka $f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{[4(x+h)^2 + 3(x+h)] - [4x^2 + 3x]}{h}$

$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{[4(x^2 + 2hx + h^2) + 3x + 3h] - [4x^2 + 3x]}{h}$

$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{4x^2 + 8hx + 4h^2 + 3x + 3h - 4x^2 - 3x}{h}$

$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{8hx + 4h^2 + 3h}{h}$

$f'(x) = \lim_{h \to 0} (8x + 4h + 3)$

$f'(x) = 8x + 3$

(c) $f(x) = x^3 - 2x$

Maka $f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{[(x+h)^3 - 2(x+h)] - [x^3 - 2x]}{h}$

$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{[x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - 2x - 2h] - [x^3 - 2x]}{h}$

$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - 2x - 2h - x^3 + 2x}{h}$

$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{3x^2h + 3xh^2 + h^3 - 2h}{h}$

$f'(x) = \lim_{h \to 0} (3x^2 + 3xh^2 + h - 2)$

$f'(x) = 3x^2 - 2$

Berdasarkan definisi turunan di atas, kita dapat memperoleh aturan tersendiri untuk mendapatkan rumus dasar turunan fungsi aljabar, yakni sebagai berikut:

Jika f(x) = ax^n maka diperoleh :

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{a(x+h)^n - ax^n}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{a\left[\binom{n}{0}x^{n-0}h^0 + \binom{n}{1}x^{n-1}h^1 + \binom{n}{2}x^{n-2}h^2 + \ldots + \binom{n}{n-1}x^1h^{n-1} + \binom{n}{n}x^{n-n}h^n\right] - ax^n}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{a\left[x^n(1) + nx^{n-1}h + \frac{1}{2}n(n-1)x^{n-2}h^2 + \ldots + nxh^{n-1} + (1)h^n\right] - ax^n}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{ax^n + nax^{n-1}h + \frac{1}{2}na(n-1)x^{n-2}h^2 + \ldots + naxh^{n-1} + ah^n - ax^n}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{nax^{n-1}h + \frac{1}{2}na(n-1)x^{n-2}h^2 + \ldots + naxh^{n-1} + ah^n}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \left[nax^{n-1} + \frac{1}{2}na(n-1)x^{n-2}h + \ldots + naxh^{n-2} + ah^{n-1}\right]$$

$$f'(x) = nax^{n-1}$$

Dari sini dapat disimpulkan bahwa : Jika f(x) = ax^n maka f '(x) = $n.ax^{n-1}$
Pengembangan dari rumus tersebut adalah turunan bentuk f(x) = ax dan bentuk f(x) = c (dimana c suatu konstanta), yakni sebagai berikut :

f(x) = ax = ax^1

maka f '(x) = $(1)ax^{1-1}$

f '(x) = ax^0

f '(x) = a

f(x) = c = cx^0

maka f '(x) = $(0)cx^{0-1}$

f '(x) = 0

Jadi dapat disimpulakan : Jika f(x) = ax maka f '(x) = a
Jika f(x) = c maka f '(x) = 0

Untuk lebih jelasnya ikutilah contoh soal berikut ini :

02. Dengan menggunakan rumus dasar turunan, tentukanlah turunan pertama dari setiap fungsi berikut ini :

(a) $f(x) = 4x^3 - 5x^2 + 6x - 2$ (b) $f(x) = 3x^{-2} + 4x^{-5} - 4x^{-1}$

(c) $f(x) = 6x^{1/2} - 12x^{-1/3} + 4x^{3/2} + 5$ (d) $f(x) = \frac{1}{2}x^{-2/3} + \frac{3}{4}x^{2/5} - 4x^{-1/3}$

Jawab

(a) $f(x) = 4x^3 - 5x^2 + 6x - 2$

Maka $f'(x) = 4(3)x^{3-1} - 5(2)x^{2-1} + 6$

$f'(x) = 12x^2 - 10x^1 + 6$

$f'(x) = 12x^2 - 10x + 6$

(b) $f(x) = 3x^{-2} + 4x^{-5} - 4x^{-1}$

Maka $f'(x) = 3(-2)x^{-2-1} + 4(-5)x^{-5-1} - 4(-1)x^{-1-1}$

$f'(x) = -6x^{-3} - 20x^{-6} + 4x^{-2}$

(c) $f(x) = 6x^{1/2} - 12x^{-1/3} + 4x^{3/2} + 5$

Maka $f'(x) = 4\left(\frac{1}{2}\right)x^{\frac{1}{2}-1} - 12\left(-\frac{1}{3}\right)x^{-\frac{1}{3}-1} + 4\left(\frac{3}{2}\right)x^{\frac{3}{2}-1}$

$f'(x) = 2x^{-1/2} + 4x^{-4/3} + 6x^{1/2}$

(d) $f(x) = \frac{1}{2}x^{-2/3} + \frac{3}{4}x^{2/5} - 4x^{-1/3}$

Maka $f'(x) = \frac{1}{2}\left(-\frac{2}{3}\right)x^{-\frac{2}{3}-1} + \frac{3}{4}\left(\frac{2}{5}\right)x^{\frac{2}{5}-1} + 4\left(-\frac{1}{3}\right)x^{-\frac{1}{3}-1}$

$f'(x) = \frac{1}{3}x^{-5/3} + \frac{3}{10}x^{-3/5} - \frac{4}{3}x^{-4/3}$

03. Dengan menggunakan rumus dasar turunan, tentukanlah turunan pertama dari setiap fungsi berikut ini :

(a) $f(x) = \frac{2}{x^3} + \frac{4}{3x^6} - \frac{2x^2}{3} - \frac{5x}{2}$ (b) $f(x) = \sqrt{x^3} + 3\sqrt{x^5} - 2\sqrt[3]{x^4}$

(c) $f(x) = \frac{4}{\sqrt{x^5}} + \frac{2}{3\sqrt{x}} - \frac{3\sqrt[3]{x^2}}{2}$ (d) $f(x) = \frac{2x^2}{3\sqrt{x}} + \frac{8x}{\sqrt{x^5}}$

Jawab

(a) $f(x) = \frac{2}{x^3} + \frac{4}{3x^6} - \frac{2x^2}{3} - \frac{5x}{2}$

$f(x) = 2x^{-3} + \frac{4}{3}x^{-6} - \frac{2}{3}x^2 - \frac{5}{2}x$

Maka f '(x) = $2(-3)x^{-3-1} + \frac{4}{3}(-6)x^{-6-1} - \frac{2}{3}(2)x^{2-1} - \frac{5}{2}$

f '(x) = $-6x^{-4} - 8x^{-7} - \frac{4}{3}x^{1} - \frac{5}{2}$

f '(x) = $-\frac{6}{x^4} - \frac{8}{x^7} - \frac{4x}{3} - \frac{5}{2}$

(b) f(x) = $\sqrt{x^3} + 3\sqrt{x^5} - 2\sqrt[3]{x^4}$

f(x) = $x^{3/2} + 3x^{5/2} - 2x^{4/3}$

Maka f '(x) = $\left(\frac{3}{2}\right)x^{\frac{3}{2}-1} + 3\left(\frac{5}{2}\right)x^{\frac{5}{2}-1} - 2\left(\frac{4}{3}\right)x^{\frac{4}{3}-1}$

f '(x) = $\frac{3}{2}x^{1/2} + \frac{15}{2}x^{3/2} - \frac{8}{3}x^{1/3}$

f '(x) = $\frac{3}{2}\sqrt{x} + \frac{15}{2}\sqrt{x^3} - \frac{8}{3}\sqrt[3]{x}$

(c) f(x) = $\frac{4}{\sqrt{x^5}} + \frac{2}{3\sqrt{x}} - \frac{3\sqrt[3]{x^2}}{2}$

f(x) = $\frac{4}{x^{5/2}} + \frac{2}{3x^{1/2}} - \frac{3x^{2/3}}{2}$

f(x) = $4x^{-5/2} + \frac{2}{3}x^{-1/2} - \frac{3}{2}x^{2/3}$

Maka f '(x) = $4\left(-\frac{5}{2}\right)x^{-\frac{5}{2}-1} + \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)x^{-\frac{1}{2}-1} - \frac{3}{2}\left(\frac{2}{3}\right)x^{\frac{2}{3}-1}$

f '(x) = $-10x^{3/2} + \frac{1}{3}x^{-3/2} - x^{-1/3}$

f '(x) = $-10x^{3/2} + \frac{1}{3x^{3/2}} - \frac{1}{x^{1/3}}$

f '(x) = $-10\sqrt{x^3} + \frac{1}{3\sqrt{x^3}} - \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$

(d) f(x) = $\frac{2x^2}{3\sqrt{x}} + \frac{8x}{\sqrt{x^5}}$

f(x) = $\frac{2x^2}{3x^{1/2}} + \frac{8x}{x^{5/2}}$

f(x) = $\frac{2}{3}x^{2-\frac{1}{2}} + 8x^{1-\frac{5}{2}}$

f(x) = $\frac{2}{3}x^{3/2} + 8x^{-3/2}$

Maka f '(x) = $\frac{2}{3}\left(\frac{3}{2}\right)x^{\frac{3}{2}-1}$ + $8\left(-\frac{3}{2}\right)x^{-\frac{3}{2}-1}$

f '(x) = $x^{1/2}$ – $12x^{-5/2}$

f '(x) = $x^{1/2}$ – $\frac{12}{x^{5/2}}$

f '(x) = $\sqrt{x}$ – $\frac{12}{\sqrt{x^5}}$

04. Dari setiap fungsi berikut ini tentukanlah nilai f '(4)

(a) f(x) = (4x – 3) (2x + 1)

(b) f(x) = $(2\sqrt{x} - 4x)^2$

(c) f(x) = $\sqrt{x}\,(2x + 5)^2$

(d) f(x) = $\frac{(3\sqrt{x} - 2x)^2}{x^2}$

Jawab

(a) f(x) = (4x – 3) (2x + 1)

f(x) = $8x^2 + 4x - 6x - 3$

f(x) = $8x^2 - 2x - 3$

Maka f '(x) = $8(2)x^{2-1} - 2$

f '(x) = $-10x^{3/2} + \frac{1}{3}x^{-3/2} - x^{-1/3}$

f '(x) = 16x – 2

(b) f(x) = $(2\sqrt{x} - 4x)^2$

f(x) = $(2\sqrt{x})^2 - 2(2\sqrt{x})(4x) + (4x)^2$

f(x) = $4x - 16x^{3/2} + 16x^2$

Maka f '(x) = $4 - 16\left(\frac{3}{2}\right)x^{\frac{3}{2}-1}$ + $16(2)x^{2-1}$

f '(x) = $4 - 24x^{1/2}$ + $32x^1$

f '(x) = $4 - 24\sqrt{x}$ + 32x

(c) f(x) = $\sqrt{x}\,(2x + 5)^2$

f(x) = $\sqrt{x}\,(4x^2 + 20x + 25)$

f(x) = $4x^{5/2}$ + $20x^{3/2}$ + $25x^{1/2}$

Maka f '(x) = $4\left(\frac{5}{2}\right)x^{\frac{5}{2}-1}$ + $20\left(\frac{3}{2}\right)x^{\frac{3}{2}-1}$ + $25\left(\frac{1}{2}\right)x^{\frac{1}{2}-1}$

f '(x) = $10x^{3/2}$ + $30x^{1/2}$ + $\frac{25}{2}x^{-1/2}$

f '(x) = $10x^{3/2} + 30x^{1/2} + \dfrac{25}{2x^{1/2}}$

f '(x) = $10\sqrt{x^3} + 30\sqrt{x} + \dfrac{25}{2\sqrt{x}}$

(d) f(x) = $\dfrac{(3\sqrt{x} - 2x)^2}{x^2}$

f(x) = $\dfrac{(3\sqrt{x})^2 - 2(3\sqrt{x})(2x) + (2x)^2}{x^2}$

f(x) = $\dfrac{9x - 12x\sqrt{x} + 4x^2}{x^2}$

f(x) = $\dfrac{9}{x} - \dfrac{12\sqrt{x}}{x} + 4$

f(x) = $9x^{-1} - 12x^{-1/2} + 4$

Maka f '(x) = $9(-1)x^{-1-1} - 12\left(-\dfrac{1}{2}\right)x^{-\frac{1}{2}-1}$

f '(x) = $-9x^{-2} + 6x^{-3/2}$

f '(x) = $-\dfrac{9}{x^2} + \dfrac{6}{x^{3/2}}$

f '(x) = $-\dfrac{9}{x^2} + \dfrac{6}{\sqrt{x^3}}$