INTEGRAL TAK TENTU FUNGSI ALJABAR

A. Aturan Dasar Integral Fungsi Aljabar

Integral dapat dipandang sebagai balikan (invers) dari turunan, sehingga integral sering disebut juga sebagai anti turunan.

Sehingga notasi integral ditulis $\int f(x)dx = F(x) + c$ jika dan hanya jika $F'(x) = f(x)$

Sebagi contoh: Jika $f(x) = x^2 + 6x - 5$ maka $f'(x) = 2x + 6$

Jika $f(x) = x^2 + 6x + 10$ maka $f'(x) = 2x + 6$

Jika $f(x) = x^2 + 6x - 1/3$ maka $f'(x) = 2x + 6$

Dari sini diperoleh $\int (2x+6)\,dx = x^2 + 6x + C$. Konstanta C dianggap mewakili –5, 10, –1/3 dan semua bilangan real yang lainnya.

Dengan berpedoman dari uraian di atas, maka kita dapat menentukan rumus dasar dari pengintegralan, yakni :

Jika $y = ax$ maka $y' = a$ untuk a bilangan real.

Jika $y = ax^n$ maka $y' = n.a\,x^{n-1}$ untuk a dan n bilangan real

Sehingga diperoleh rumusan : jika a dan n adalah bilangan real dengan $n \neq -1$, maka :

a. $\int a\,dx = ax + c$

b. $\int ax^n\,dx = \frac{a}{n+1}x^{n+1} + c$

Untuk pemahaman lebih lanjut, akan diuraikan pada contoh-contoh soal berikut ini :

01. Selesaikanlah integral berikut ini :

a. $\int (8x^3 - 3x^2 + 4x - 5)\,dx$ b. $\int (\frac{1}{2}x^3 - x^2 + \frac{4}{3}x + 2)\,dx$

Jawab

(a) $$\int (8x^3 - 3x^2 + 4x - 5)\,dx = \frac{8}{3+1}x^{3+1} - \frac{3}{2+1}x^{2+1} + \frac{4}{1+1}x^{1+1} - 5x + C$$

$$= 2x^4 - x^3 + 2x^2 - 5x + C$$

(b) $$\int (\frac{1}{2}x^3 - x^2 + \frac{4}{3}x + 2)\,dx = \frac{1/2}{3+1}x^{3+1} - \frac{1}{2+1}x^{2+1} + \frac{4/3}{1+1}x^{1+1} + 2x + C$$

$$= \frac{1/2}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{4/3}{2}x^2 + 2x + C$$

$$= \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{4}{6}x^2 + 2x + C$$

$$= \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{3}x^2 + 2x + C$$

02. Selesaikanlah integral berikut ini :

a. $\int (3x^{-1/2} + 2x^{-3} + x^2)\, dx$

b. $\int (\frac{2}{3x^2} - \frac{4}{x^3} + 2x)\, dx$

Jawab

(a) $\int (3x^{-1/2} + 2x^{-3} + x^2)\, dx = \frac{3}{-\frac{1}{2}+1} x^{-\frac{1}{2}+1} + \frac{2}{-3+1} x^{-3+1} + \frac{1}{2+1} x^{2+1} + C$

$$= \frac{3}{1/2} x^{1/2} + \frac{2}{-2} x^{-2} + \frac{1}{3} x^3 + C$$

$$= 6x^{1/2} - x^{-2} + \frac{1}{3}x^3 + C$$

(b) $\int (\frac{2}{3x^2} - \frac{4}{x^3} + 2x)\, dx = \int (\frac{2}{3}x^{-2} - 4x^{-3} + 2x)\, dx$

$$= \frac{2/3}{-2+1} x^{-2+1} - \frac{4}{-3+1} x^{-3+1} + \frac{2}{1+1} x^{1+1} + C$$

$$= \frac{2/3}{-1} x^{-1} - \frac{4}{-2} x^{-2} + \frac{2}{2} x^2 + C$$

$$= -\frac{2}{3} x^{-1} - 2x^{-2} + x^2 + C$$

$$= -\frac{2}{3x} - \frac{2}{x^2} + x^2 + C$$

03. Selesaikanlah integral berikut ini :

a. $\int [4\sqrt{x^3} - 2\sqrt{x} + 5x\sqrt{x}]dx$

b. $\int [\frac{3}{2\sqrt{x^3}} + \frac{2}{\sqrt{x}} - \frac{4x^2}{\sqrt{x}}]dx$

Jawab

(a) $\int [4\sqrt{x^3} - 2\sqrt{x} + 5x\sqrt{x}]dx = \int [4x^{3/2} - 2x^{1/2} + 5x^1.x^{1/2}]dx$

$$= \int [4x^{3/2} - 2x^{1/2} + 5x^{3/2}]dx$$

$$= \int [9x^{3/2} - 2x^{1/2}]dx$$

$$= \frac{9}{\frac{3}{2}+1} x^{\frac{3}{2}+1} - \frac{2}{\frac{1}{2}+1} x^{\frac{1}{2}+1} + C$$

$$= \frac{9}{5/2} x^{5/2} - \frac{2}{3/2} x^{3/2} + C$$

$$= \frac{18}{5} x^{5/2} + \frac{4}{3} x^{3/2} + C$$

$$= \frac{18}{5} \sqrt{x^5} + \frac{4}{3} \sqrt{x^3} + C$$

04. Selesaikanlah $\int \frac{(2\sqrt{x} + x)^2}{x} dx$

Jawab

$$\int \frac{(2\sqrt{x} + x)^2}{x} dx = \int \frac{(2\sqrt{x})^2 + 2(2\sqrt{x})(x) + x^2}{x} dx$$

$$= \int \frac{4x + 4x\sqrt{x} + x^2}{x} dx$$

$$= \int \left[\frac{4x}{x} + \frac{4x\sqrt{x}}{x} + \frac{x^2}{x} \right] dx$$

$$= \int (4 + 4\sqrt{x} + x)\, dx$$

$$= \int (4 + 4x^{1/2} + x)\, dx$$

$$= 4x + \frac{4}{3/2} x^{3/2} + \frac{1}{2} x^2 + C$$

$$= 4x + \frac{8}{3} \sqrt{x^3} + \frac{1}{2} x^2 + C$$