PENERAPAN TURUNAN FUNGSI

D. Aplikasi Turunan Fungsi

Langkah- Langkah menyelesaikan soal-soal apliksi turunan

1. Menetapkan varibel-variabel fungsi
2. Menentukan hubungan antar variabel, sehingga terbentuk suatu fungsi
3. Menentukan nilai maksimum atau minimum fungsi

Untuk lebih jelasnya, ikutilah contoh soal berikut ini :

01. Dua buah bilangan real positip mempunyai hasil kali 80. Supaya jumlah kedua bilangan itu minimum, maka tentukanlah kedua bilangan tersebut

Jawab

Misalkan kedua bilangan itu x dan y

Maka : $x \cdot y = 80$

$$y = \frac{80}{x}$$

Misalkan $H = x + y$

Maka : $H = x + \frac{80}{x}$

$$H = x + 80x^{-1}$$

Syarat H minimum : $H' = 0$

$$1 - 80x^{-2} = 0$$

$$1 - \frac{80}{x^2} = 0$$

$$1 = \frac{80}{x^2}$$

$$x^2 = 80$$

$$x_1 = 4\sqrt{5}$$ (kedua bilangan positif)

$$y_1 = \frac{80}{4\sqrt{5}} = \frac{20}{\sqrt{5}} \times \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{20}{5}\sqrt{5} = 4\sqrt{5}$$

Jadi kedua bilangan positif itu adalah $4\sqrt{5}$ dan $4\sqrt{5}$

02. Suatu persegi panjang mempunyai keliling 24 cm. Supaya luas persegi panjang maksimum maka tentukanlah ukuran panjang dan lebarnya

Jawab

Misalkan panjang x dan lebar y, maka keliling : $K = 2x + 2y$

Maka : $2x + 2y = 24$

$x + y = 12$

$y = 12 – x$

Misalkan luas : $L = x \cdot y$

Maka : $L = x(12 – x)$

$L = 12x – x^2$

Syarat H minimum : $L' = 0$

$12 – 2x = 0$

$2x = 12$

$x = 6$

$y = 12 – x = 12 – 6 = 6$

Jadi persegi panjang tersebut panjangnya 6 cm dan lebarnya juga 6 cm

06. Sebuah balok akan dibuat dengan alasnya berbentuk persegi. Jika luas permukaan balok (bidang-bidang sisinya) adalah 24 cm^2, maka tentukanlah volume terbesar yang mungkin dicapai balok tersebut

Jawab

Misalkan panjang x , lebar x dan tinggi y, maka

Luas permukaan balok : $L = 2(x + x + y) = 24$

$2x + y = 12$

$y = 12 – 2x$

Misalkan volum balok $V = x^2 \cdot y$

Maka : $V = x^2 (12 – 2x)$

$V = 12x^2 – 2x^3$

Syarat H minimum : $V' = 0$

$24x – 6x^2 = 0$

$6x(4 – x) = 0$

$x_1 = 0$ dan $x_2 = 4$

Jadi $V = 12x^2 – 2x^3$

$V = 12(4)^2 – 2(4)^3$

$V = 64$

07. Sebuah balok akan dibuat tampa tutup dengan alasnya berbentuk persegi. Jika volume balok adalah 32 cm^3, maka tentukanlah luas permukaan balok maksimum yang mungkin dicapai

Jawab

Misalkan panjang x , lebar x dan tinggi y, maka

Volum balok : V = x . x . y = x^2 y = 32

$$y = \frac{32}{x^2}$$

$$y = 324\,x^{-2}$$

Misalkan Luas permukaan balok L = xx + 2xy + 2xy

$$L = x^2 + 4xy$$

$$L = x^2 + 4x(32\,x^{-2})$$

$$L = x^2 + 128\,x^{-1}$$

Syarat H minimum : L' =0

$$2x - 128\,x^{-2} = 0$$

$$2x - \frac{128}{x^2} = 0$$

$$2x = \frac{128}{x^2}$$

$$x^3 = 64$$

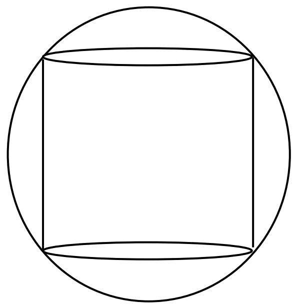
$$x = 4$$

Jadi $L = x^2 + 128\,x^{-1} = x^2 + \frac{128}{x} = 4^2 + \frac{128}{4} = 16 + 32 = 48 \text{ cm}^2$

08. Didalam sebuah bola berjari-jari 6 cm dibuat tabung dimana bidang alas dan atas tabung bersinggungan dengan selimut bola (Seperti gambar). Jika jari-jari alas tabung adalah r dan tingginya adalah 2h, maka :

(a) Nyatakanlah volume tabung sebagai fungsi dari h

(b) Tentukanlah jari-jari alas dan tinggi tabung, agar volumenya maksimum



Jawab

(a) V = Luas alas x tinggi

$V = (\pi r^2)(2h)$

$V = 2\pi h r^2$ …………………………….. (1)

$AC = \sqrt{BA^2 - BC^2}$

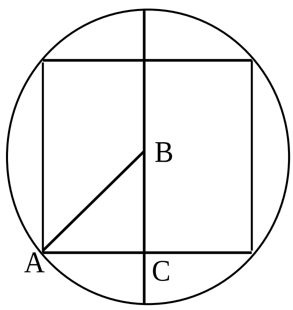
$r = \sqrt{6^2 - h^2}$

$r = \sqrt{36 - h^2}$ ………………………. (2)

(1) dan (2) diperoleh $V = 2\pi h\left(\sqrt{36 - h^2}\right)^2$

$V = 2\pi h(36 - h^2)$

$V = 72\pi h - 2\pi h^3$



(b) Syarat : V' = 0

$72\pi - 6\pi h^2 = 0$

$12 - h^2 = 0$

$(2\sqrt{3} - h)(2\sqrt{3} + h) = 0$ jadi $h = 2\sqrt{3}$ cm

$r = \sqrt{36 - (2\sqrt{3})^2}$

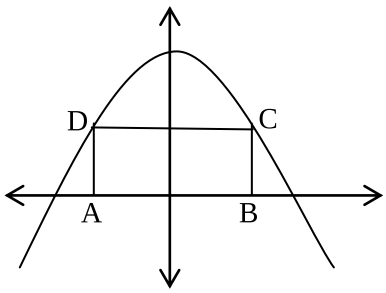
$r = \sqrt{36 - 12}$

$r = \sqrt{24}$

$r = 2\sqrt{6}$

Jadi jari-jari alas = $2\sqrt{6}$ cm dan tinggi tabung = $2\sqrt{3}$ cm

09. Sebuah parabola dinyatakan dengan persamaan $y = 12 - x^2$ seperti gambar di samping. Tentukanlah luas maksimum persegipanjang ABCD



Jawab

Panjang = 2x

Lebar = $12 - x^2$

Maka Luas : $L = (2x)(12 - x^2)$

$L = 24x - 2x^3$

Syarat maksimum : $L' = 0$ maka $24 - 6x^2 = 0$

$4 - x^2 = 0$

$(2 - x)(2 + x) = 0$ Jadi $x = 2$

Sehingga luas persegipanjang maksimum : $L = 24x - 2x^3$

$L = 24(2) - 2(2)^3$

$L = 32$ satuan luas