

INDUKSI MATEMATIKA

B. Penerapan Induksi Matematika pada Barisan dan deret

Langkah-langkah pembuktian :

- (1) Tunjukkan bahwa rumus $S(n)$ benar untuk $n = 1, 2, 3$
- (2) Anggap bahwa rumus $S(n)$ benar untuk $n = k$
- (3) Akan dibuktikan bahwa rumus S_n benar untuk $n = k + 1$

Untuk lebih jelasnya ikutilah contoh soal berikut ini

01. Dengan induksi matematika buktikanlah rumus $3 + 7 + 11 + 15 + \dots + (4n - 1) = n(2n + 1)$

Jawab

Untuk $n = 1$, diperoleh $3 = 1(2[1] + 1) = 3$ (terbukti)

Untuk $n = 2$, diperoleh $3 + 7 = 2(2[2] + 1) = 10$ (terbukti)

Untuk $n = 3$, diperoleh $3 + 7 + 11 = 3(2[3] + 1) = 21$ (terbukti)

Dari data diatas anggap bahwa rumus benar untuk $n = k$, artinya

$3 + 7 + 11 + 15 + \dots + (4k - 1) = k(2k + 1)$ adalah benar (hipotesa)

Akan dibuktikan bahwa rumus juga benar untuk $n = k + 1$, artinya

$3 + 7 + 11 + 15 + \dots + (4k - 1) + (4[k+1] - 1) = [k+1](2[k+1] + 1)$

$$k(2k + 1) + (4[k+1] - 1) = [k+1](2[k+1] + 1)$$

$$2k^2 + k + 4k + 4 - 1 = [k+1](2[k+1] + 1)$$

$$2k^2 + 5k + 3 = [k+1](2[k+1] + 1)$$

$$(k + 1)(2k + 3) = [k+1](2[k+1] + 1)$$

$$(k + 1)(2k + 2 + 1) = [k+1](2[k+1] + 1)$$

$$(k + 1)(2[k+1] + 1) = [k+1](2[k+1] + 1) \quad (\text{terbukti})$$

Jadi terbukti rumus $3 + 7 + 11 + 15 + \dots + (4n - 1) = n(2n + 1)$

02. Dengan induksi matematika buktikanlah rumus $2 + 5 + 8 + 11 + \dots + (3n - 1) = \frac{1}{2}n(3n + 1)$

Jawab

Untuk $n = 1$, diperoleh $2 = \frac{1}{2}(1)(3[1] + 1) = 2$ (terbukti)

Untuk $n = 2$, diperoleh $2 + 5 = \frac{1}{2}(2)(3[2] + 1) = 7$ (terbukti)

Untuk $n = 3$, diperoleh $2 + 5 + 8 = \frac{1}{2}(3)(3[3] + 1) = 15$ (terbukti)

Dari data diatas anggap bahwa rumus benar untuk $n = k$, artinya

$$2 + 5 + 8 + 11 + \dots + (3k - 1) = \frac{1}{2} k(3k + 1) \text{ adalah benar (hipotesa)}$$

Akan dibuktikan bahwa rumus juga benar untuk $n = k + 1$, artinya

$$2 + 5 + 8 + 11 + \dots + (3k - 1) + (3[k+1] - 1) = \frac{1}{2} [k+1](3[k+1] + 1)$$

$$\frac{1}{2} k(3k + 1) + (3[k+1] - 1) = \frac{1}{2} [k+1](3[k+1] + 1)$$

$$\frac{1}{2} (3k^2 + k) + (3k + 3 - 1) = \frac{1}{2} [k+1](3[k+1] + 1)$$

$$\frac{1}{2} (3k^2 + k) + \frac{2}{2} (3k + 2) = \frac{1}{2} [k+1](3[k+1] + 1)$$

$$\frac{1}{2} [(3k^2 + k) + (6k + 4)] = \frac{1}{2} [k+1](3[k+1] + 1)$$

$$\frac{1}{2} (3k^2 + 7k + 4) = \frac{1}{2} [k+1](3[k+1] + 1)$$

$$\frac{1}{2} (3k + 4)(k + 1) = \frac{1}{2} [k+1](3[k+1] + 1)$$

$$\frac{1}{2} (k + 1)(3k + 3 + 1) = \frac{1}{2} [k+1](3[k+1] + 1)$$

$$\frac{1}{2} (k + 1)(3[k + 1] + 1) = \frac{1}{2} [k+1](3[k+1] + 1) \quad (\text{terbukti})$$

$$\text{Jadi terbukti rumus } 2 + 5 + 8 + 11 + \dots + (3n - 1) = \frac{1}{2} n(3n + 1)$$

03. Dengan induksi matematika buktikanlah bahwa $3 + 5 + 7 + 9 + \dots + (2n + 1) = n^2 + 2n$ untuk n bilangan asli

Jawab

$$\text{Untuk } n = 1, \text{ diperoleh } 3 = 1(2[1] + 1) = 3 \text{ (terbukti)}$$

$$\text{Untuk } n = 2, \text{ diperoleh } 3 + 7 = 2(2[2] + 1) = 10 \text{ (terbukti)}$$

$$\text{Untuk } n = 3, \text{ diperoleh } 3 + 7 + 11 = 3(2[3] + 1) = 21 \text{ (terbukti)}$$

Dari data diatas anggap bahwa rumus benar untuk $n = k$, artinya

$$3 + 7 + 11 + 15 + \dots + (4k - 1) = k(2k + 1) \text{ adalah benar (hipotesa)}$$

Akan dibuktikan bahwa rumus juga benar untuk $n = k + 1$, artinya

$$3 + 7 + 11 + 15 + \dots + (4k - 1) + (4[k+1] - 1) = [k+1](2[k+1] + 1)$$

$$k(2k + 1) + (4[k+1] - 1) = [k+1](2[k+1] + 1)$$

$$2k^2 + k + 4k + 4 - 1 = [k+1](2[k+1] + 1)$$

$$2k^2 + 5k + 3 = [k+1](2[k+1] + 1)$$

$$(k + 1)(2k + 3) = [k+1](2[k+1] + 1)$$

$$(k + 1)(2k + 2 + 1) = [k+1](2[k+1] + 1)$$

$$(k + 1)(2[k+1] + 1) = [k+1](2[k+1] + 1) \quad (\text{terbukti})$$

Jadi terbukti rumus $3 + 7 + 11 + 15 + \dots + (4n - 1) = n(2n + 1)$

04. Dengan induksi matematika buktikanlah bahwa :

$$8 + 16 + 32 + 64 + \dots + 2^{n+2} = 2^{n+3} - 8 \quad \text{untuk } n \text{ bilangan asli}$$

Jawab

$$\text{Untuk } n = 1, \text{ diperoleh } 8 = 2^{1+3} - 8 = 16 - 8 = 8 \quad (\text{terbukti})$$

$$\text{Untuk } n = 2, \text{ diperoleh } 8 + 16 = 2^{2+3} - 8 = 32 - 8 = 24 \quad (\text{terbukti})$$

$$\text{Untuk } n = 3, \text{ diperoleh } 8 + 16 + 32 = 2^{3+3} - 8 = 64 - 8 = 56 \quad (\text{terbukti})$$

Dari data diatas anggap bahwa rumus benar untuk $n = k$, artinya

$$8 + 16 + 32 + 64 + \dots + 2^{k+2} = 2^{k+3} - 8 \quad \text{adalah benar (hipotesa)}$$

Akan dibuktikan bahwa rumus juga benar untuk $n = k + 1$, artinya

$$8 + 16 + 32 + 64 + \dots + 2^{k+2} + 2^{(k+1)+2} = 2^{(k+1)+3} - 8$$

Bukti :

$$8 + 16 + 32 + 64 + \dots + 2^{k+2} + 2^{(k+1)+2} = 2^{(k+1)+3} - 8$$

$$2^{k+3} - 8 + 2^{(k+1)+2} = 2^{(k+1)+3} - 8$$

$$2^{k+3} - 8 + 2^{k+3} = 2^{(k+1)+3} - 8$$

$$2 \cdot (2^{k+3}) - 8 = 2^{(k+1)+3} - 8$$

$$2^1 \cdot 2^{k+3} - 8 = 2^{(k+1)+3} - 8$$

$$2^{(k+1)+3} - 8 = 2^{(k+1)+3} - 8 \quad \text{terbukti}$$

Jadi : $8 + 16 + 32 + 64 + \dots + 2^{n+2} = 2^{n+3} - 8$ untuk n bilangan asli

05. Dengan induksi matematika buktikanlah bahwa :

$$6 + 18 + 54 + 162 + \dots + 2 \cdot 3^n = 3^{n+1} - 3 \quad \text{untuk } n \text{ bilangan asli}$$

Jawab

$$\text{Untuk } n = 1, \text{ diperoleh } 6 = 3^{1+1} - 3 = 9 - 3 = 6 \quad (\text{terbukti})$$

$$\text{Untuk } n = 2, \text{ diperoleh } 6 + 18 = 3^{2+1} - 3 = 27 - 3 = 24 \quad (\text{terbukti})$$

$$\text{Untuk } n = 3, \text{ diperoleh } 6 + 18 + 54 = 3^{3+1} - 3 = 81 - 3 = 78 \quad (\text{terbukti})$$

Dari data diatas anggap bahwa rumus benar untuk $n = k$, artinya

$$6 + 18 + 54 + 162 + \dots + 2 \cdot 3^k = 3^{k+1} - 3 \text{ adalah benar (hipotesa)}$$

Akan dibuktikan bahwa rumus juga benar untuk $n = k + 1$, artinya

$$6 + 18 + 54 + 162 + \dots + 2 \cdot 3^k + 2 \cdot 3^{k+1} = 3^{(k+1)+1} - 3$$

Bukti :

$$6 + 18 + 54 + 162 + \dots + 2 \cdot 3^k + 2 \cdot 3^{k+1} = 3^{(k+1)+1} - 3$$

$$3^{k+1} - 3 + 2 \cdot 3^{k+1} = 3^{(k+1)+1} - 3$$

$$3 \cdot 3^{k+1} - 3 = 3^{(k+1)+1} - 3$$

$$3^1 \cdot 3^{k+1} - 3 = 3^{(k+1)+1} - 3$$

$$3^{(k+1)+1} - 3 = 3^{(k+1)+1} - 3 \text{ terbukti}$$

Jadi : $6 + 18 + 54 + 162 + \dots + 2 \cdot 3^n = 3^{n+1} - 3$ untuk n bilangan asli

06. Dengan induksi matematika buktikanlah bahwa :

$$2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \dots + 2^n = 2(2^n - 1) \text{ untuk } n \text{ bilangan asli}$$

Jawab

$$n = 1 \text{ maka } 2^1 = 2(2^1 - 1)$$

$$2 = 2 \text{ (benar)}$$

$$n = 2 \text{ maka } 2^1 + 2^2 = 2(2^2 - 1)$$

$$2 + 4 = 2(4 - 1) \text{ (benar)}$$

$$n = 3 \text{ maka } 2^1 + 2^2 + 2^3 = 2(2^3 - 1)$$

$$2 + 4 + 8 = 2(8 - 1) \text{ (benar)}$$

$$\text{Hipotesa : } n = k \text{ maka } 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \dots + 2^k = 2(2^k - 1) \text{ (benar)}$$

Uji hipotesa

$$n = k + 1 \text{ maka } 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \dots + 2^k + 2^{k+1} = 2(2^{k+1} - 1)$$

$$2(2^k - 1) + 2^{k+1} = 2(2^{k+1} - 1)$$

$$2 \cdot 2^k - 2 + 2^{k+1} = 2(2^{k+1} - 1)$$

$$2^{k+1} - 2 + 2^{k+1} = 2(2^{k+1} - 1)$$

$$2 \cdot 2^{k+1} + 2^{k+1} = 2(2^{k+1} - 1)$$

$$2(2^{k+1} - 1) = 2(2^{k+1} - 1) \text{ terbukti}$$

Jadi : $2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \dots + 2^n = 2(2^n - 1)$ untuk n bilangan asli

07. Dengan induksi matematika buktikanlah bahwa :

$$5^2 + 5^3 + 5^4 + 5^5 + \dots + 5^{n+1} = \frac{1}{4}(5^{n+2} - 25) \text{ untuk } n \text{ bilangan asli}$$

Jawab

$$\text{Untuk } n = 1, \text{ diperoleh } 5^2 = \frac{1}{4}(5^{1+2} - 25) = 25 \text{ (terbukti)}$$

$$\text{Untuk } n = 2, \text{ diperoleh } 5^2 + 5^3 = \frac{1}{4}(5^{2+2} - 25) = 150 \text{ (terbukti)}$$

$$\text{Untuk } n = 3, \text{ diperoleh } 5^2 + 5^3 + 5^4 = \frac{1}{4}(5^{3+2} - 25) = 775 \text{ (terbukti)}$$

Dari data diatas anggap bahwa rumus benar untuk $n = k$, artinya

$$5^2 + 5^3 + 5^4 + 5^5 + \dots + 5^{k+1} = \frac{1}{4}(5^{k+2} - 25) \text{ adalah benar (hipotesa)}$$

Akan dibuktikan bahwa rumus juga benar untuk $n = k + 1$, artinya

$$5^2 + 5^3 + 5^4 + 5^5 + \dots + 5^{k+1} + 5^{(k+1)+1} = \frac{1}{4}(5^{(k+1)+2} - 25)$$

Bukti :

$$5^2 + 5^3 + 5^4 + 5^5 + \dots + 5^{k+1} + 5^{(k+1)+1} = \frac{1}{4}(5^{(k+1)+2} - 25)$$

$$\frac{1}{4}(5^{k+2} - 25) + 5^{k+2} = \frac{1}{4}(5^{(k+1)+2} - 25)$$

$$\frac{1}{4}(5^{k+2} - 25) + \frac{1}{4}(4 \cdot 5^{k+2}) = \frac{1}{4}(5^{(k+1)+2} - 25)$$

$$\frac{1}{4}(5^{k+2} - 25 + 4 \cdot 5^{k+2}) = \frac{1}{4}(5^{(k+1)+2} - 25)$$

$$\frac{1}{4}(5 \cdot 5^{k+2} - 25) = \frac{1}{4}(5^{(k+1)+2} - 25)$$

$$\frac{1}{4}(5^{(k+1)+2} - 25) = \frac{1}{4}(5^{(k+1)+2} - 25) \text{ terbukti}$$

$$\text{Jadi : } 5^2 + 5^3 + 5^4 + 5^5 + \dots + 5^{n+1} = \frac{1}{4}(5^{n+2} - 25) \text{ untuk } n \text{ bilangan asli}$$

08. Dengan induksi matematika buktikanlah bahwa :

$$\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \frac{1}{4 \times 5} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = 1 - \frac{1}{n+1} \text{ untuk } n \text{ bilangan asli}$$

Jawab

$$n = 1 \text{ maka } \frac{1}{1 \times 2} = 1 - \frac{1}{1+1}$$

$$\frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \text{ (benar)}$$

$$n = 2 \text{ maka } \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} = 1 - \frac{1}{1+2}$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{6} = 1 - \frac{1}{3}$$

$$\frac{2}{3} = \frac{2}{3} \quad (\text{benar})$$

$$n = 2 \text{ maka } \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} = 1 - \frac{1}{1+2}$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{6} = 1 - \frac{1}{3}$$

$$\frac{2}{3} = \frac{2}{3} \quad (\text{benar})$$

$$\text{Hipotesa: } n = k \text{ maka } \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \frac{1}{4 \times 5} + \dots + \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{k+1} \quad (\text{benar})$$

Uji hipotesa untuk $n = k + 1$

$$\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \frac{1}{4 \times 5} + \dots + \frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} = 1 - \frac{1}{(k+1)+1}$$

$$1 - \frac{1}{k+1} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} = 1 - \frac{1}{(k+1)+1}$$

$$\frac{(k+1)(k+2)}{(k+1)(k+2)} - \frac{(k+2)}{(k+1)(k+2)} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} = 1 - \frac{1}{(k+1)+1}$$

$$\frac{(k^2 + 3k + 2) - (k+2) + 1}{(k+1)(k+2)} = 1 - \frac{1}{(k+1)+1}$$

$$\frac{k^2 + 2k + 1}{(k+1)(k+2)} = 1 - \frac{1}{(k+1)+1}$$

Jadi : $2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \dots + 2^n = 2(2^n - 1)$ untuk n bilangan asli